MICHELE COLUCCI

elettronica generale

VOLUME PRIMO

SECONDA EDIZIONE

FORME D'ONDA - ELEMENTI E TEORIA DEI CIRCUITI - TUBI ELETTRONICI A VUOTO ED A GAS - DIODI A SEMICONDUTTORE E TRANSISTORI - AMPLIFICATORI MAGNETICI - OTTICA ELETTRONICA - DISPOSITIVI FOTOELETTRICI

EDIZIONI CEDAM - PADOVA

Manno

PREFAZIONE
alla prima edizione

Il titolo del presente libro è giustificato dal fatto che in esso vengono trattati gli argomenti richiesti dai programmi di «Elettronica Generale» degli Istituti Tecnici Industriali.

Come libro di testo esso è previsto sia per la specializzazione di Elettronica Industriale *sia per quella di* Energia Nucleare *anche se i relativi programmi differiscono parzialmente; i pochi argomenti che esulano dal programma di una specializzazione possono essere saltati durante l'insegnamento scolastico ma all'occorrenza costituiranno per l'allievo una immediata ed utile fonte di consultazione.*

Nella compilazione si è evitato per quanto possibile di imporre delle nozioni cercando invece di dedurne la maggior parte da pochi principi fondamentali, di origine fisica o sperimentale, facilmente acquisibili dagli studenti. Per facilitare l'apprendimento si è cercato di dare svolgimento simile alla trattazione di argomenti affini.

La matematica è stata usata nei limiti consentiti dai programmi degli Istituti Tecnici; dove per completezza è stato necessario far uso di equazioni differenziali, queste sono state svolte in nota in modo da non interrompere la continuità del testo a chi volesse evitarle.

Questo primo volume, di carattere preliminare, è dedicato allo studio degli argomenti fondamentali e dei dispositivi più comuni che interessano il campo sempre più vasto dell'elettronica; il secondo volume, di carattere applicativo, prende in esame i circuiti che con maggior frequenza si ritrovano nelle apparecchiature elettroniche.

Spero che questo lavoro, supplendo alla mancanza di libri di testo specializzati, possa essere di aiuto agli studenti agevolando nel tempo stesso l'opera degli insegnanti.

Sarò grato a quanti, insegnanti e tecnici, vorranno farmi pervenire osservazioni, critiche e suggerimenti.

Colgo l'occasione per ringraziare quanti mi hanno incoraggiato ed aiutato in questo lavoro e, tra gli altri, l'allievo perito industriale SERGIO PIRRA *che ha collaborato alla stesura dei capitoli XII, XIII e XIV di questo primo volume.*

Un particolare ringraziamento alla Casa Editrice per la fiducia concessami.

Torino, settembre 1962.

M. COLUCCI

INDICE

Cap. I – Forme d'onda

1. Generalità sulle forme d'onda . . . . . pag. 1
2. Forma d'onda sinusoidale . . . . . » 4
3. Gradino di tensione o di corrente . . . . . » 6
4. Forma d'onda rettangolare . . . . . » 8
5. Forma d'onda triangolare . . . . . » 10
6. Impulsi . . . . . » 13
7. Forme d'onda di derivazione e di integrazione . . . . . » 13

Cap. II – Elementi circuitali

8. Resistenze . . . . . » 17
9. Effetto pellicolare . . . . . » 19
10. Effetto di vicinanza ed altre cause di aumento della resistenza . . » 21
11. Resistori usati nei circuiti elettronici . . . . . » 23
12. Induttanze . . . . . » 25
13. Circuito equivalente di un induttore. Fattore di merito . . . . . » 28
14. Induttanza di un solenoide. Permeabilità incrementale . . . . . » 31
15. Induttori variabili . . . . . » 34
16. Induttori usati nei circuiti elettronici . . . . . » 37
17. Capacità . . . . . » 39
18. Circuito equivalente di un condensatore. Angolo di perdita . . . . » 40
19. Condensatori usati nei circuiti elettronici . . . . . » 42

Cap. III – Teoremi generali

20. Generatori di tensione e di corrente. Teorema di Norton . . . . . » 45
21. Legge di Ohm generalizzata. Principi di Kirchhoff . . . . . » 47
22. Teorema di Thèvenin . . . . . » 50
23. Teorema di Millman . . . . . » 51
24. Principio di sovrapposizione . . . . . » 53
25. Teorema di Kennelly-Steinmetz. . . . . » 53

Cap. IV – Fenomeni transitori ed oscillazioni libere

26. Fenomeni transitori in circuiti *RC* . . . . . » 54
27. Fenomeni transitori in circuiti *RL* . . . . . » 61
28. Oscillazioni libere persistenti in circuiti *LC* . . . . . » 64
29. Oscillazioni libere smorzate in circuiti *RLC* . . . . . » 68
30. Decremento logaritmico . . . . . » 72
31. Resistenza critica . . . . . » 73

Cap. V – Risposta di circuiti *RC*, *RL* ed *RLC* a forme d'onda sinusoidali. Oscillazioni forzate

32. Circuito *RC* in regime sinusoidale . . . . . pag. 76
33. Circuito *RL* in regime sinusoidale . . . . . » 80
34. Circuito risonante serie . . . . . » 82
35. Coefficiente di risonanza . . . . . » 84
36. Curva di risonanza . . . . . » 85
37. Frequenze di taglio e banda passante . . . . . » 88
38. Circuito risonante serie a variazione di capacità o di induttanza . » 92
39. Circuito risonante parallelo . . . . . » 96
40. Curva di risonanza universale . . . . . » 101
41. Decibel . . . . . » 104

Cap. VI – Risposta di circuiti *RC*, *RL* ed *RLC* a forme d'onda non sinusoidali

42. Circuito *RC*: risposta ad un gradino di tensione . . . . . » 107
43. Circuito *RC*: risposta a forme d'onda rettangolari . . . . . » 111
44. Circuito *RC*: risposta a forme d'onda triangolari ed esponenziali . » 120
45. Partitori compensati . . . . . » 129
46. Circuito *RL*: risposta ad un gradino di tensione . . . . . » 137
47. Circuito *RL*: risposta a forme d'onda rettangolari . . . . . » 138
48. Circuito *RL*: risposta a forme d'onda triangolari ed esponenziali . » 140
49. Circuiti *RLC* . . . . . » 141

Cap. VII – Circuiti accoppiati

50. Oscillazioni libere in circuiti oscillatori accoppiati . . . . . » 146
51. Circuiti accoppiati in regime sinusoidale . . . . . » 149
52. Circuiti oscillatori accoppiati in regime sinusoidale . . . . . » 155
53. Curve di risonanza dei circuiti oscillatori accoppiati . . . . . » 158
54. Banda passante dei circuiti oscillatori accoppiati . . . . . » 163
55. Filtri di banda . . . . . » 167
56. Complementi sui circuiti oscillatori accoppiati . . . . . » 170
57. Vari metodi di accoppiamento tra due circuiti oscillatori . . . . . » 171
58. Condizione di massimo trasferimento di potenza . . . . . » 173

Cap. VIII – Cenni su quadripoli e filtri

59. Quadripoli passivi . . . . . » 178
60. Resistenza d'ingresso e resistenza di uscita di un quadripolo . . . » 180
61. Quadripoli a *T* e a π e relative trasformazioni . . . . . » 181
62. Quadripoli uguali in cascata . . . . . » 183
63. Impiego dei quadripoli come adattatori e come attenuatori . . . . » 186
64. Filtri: generalità e tipi . . . . . » 188

Cap. IX – Tubi elettronici a vuoto

65. Emissione termoelettronica . . . . . » 193
66. Diodo a vuoto . . . . . » 195
67. Caratteristiche anodiche del diodo . . . . . » 198
68. Limitazioni nell'impiego dei diodi . . . . . » 202
69. Riscaldamento diretto e riscaldamento indiretto . . . . . » 203
70. Tipi più comuni di catodi termoelettronici e di anodi. Getter . . . » 207
71. Risoluzione grafica di circuiti con diodi . . . . . » 208
72. Osservazioni sui diodi a vuoto . . . . . » 215

73. Triodo . . . . . pag. 216
74. Massima dissipazione anodica . . . . . » 221
75. Coefficienti caratteristici del triodo . . . . . » 222
76. Emissioni secondarie . . . . . » 226
77. Risoluzione grafica di circuiti con triodo . . . . . » 228
78. Funzione amplificatrice del triodo . . . . . » 231
79. Tetrodo a griglia schermo . . . . . » 237
80. Tetrodo a fascio elettronico . . . . . » 241
81. Pentodo . . . . . » 243

Cap. X – Tubi elettronici a gas

82. Conduzione elettrica nei gas . . . . . » 244
83. Diodo a gas a catodo caldo (fanotron) . . . . . » 246
84. Triodi e tetrodi a gas a catodo caldo (tiratroni) . . . . . » 252
85. Mutatori a vapore di mercurio . . . . . » 256
86. Ignitroni . . . . . » 259
87. Eccitroni. Senditroni . . . . . » 262
88. Diodi a gas a catodo freddo . . . . . » 263
89. Triodi a gas a catodo freddo (trigger) . . . . . » 266
90. Tubi fluorescenti . . . . . » 268

Cap. XI – Diodi a semiconduttore e transistori

91. Semiconduttori. Donatori ed accettori . . . . . » 274
92. Giunzione *p-n* . . . . . » 278
93. Diodi a semiconduttore . . . . . » 281
94. Limitazioni nell'impiego dei diodi a semiconduttori . . . . . » 285
95. Risoluzione grafica di circuiti con diodi a semiconduttori . . . . » 286
96. Confronto tra i diodi a semiconduttore e i diodi a vuoto . . . . » 287
97. Diodo tunnel. Rettificatori metallici . . . . . » 288
98. Transistori . . . . . » 289
99. Curve caratteristiche dei transistori . . . . . » 292
100. Coefficienti caratteristici del transistore . . . . . » 296
101. Risoluzione grafica di circuiti con transistori . . . . . » 299
102. Funzione amplificatrice del transistore . . . . . » 304
103. Limitazioni nell'impiego dei transistori . . . . . » 307

Cap. XII – Cenni sugli amplificatori magnetici

104. Trasduttore . . . . . » 310
105. Amplificatore magnetico . . . . . » 313
106. Curve caratteristiche dell'amplificatore magnetico . . . . . » 316

Cap. XIII – Ottica elettronica

107. Azione dei campi elettrici sugli elettroni . . . . . » 318
108. Azione dei campi magnetici sugli elettroni . . . . . » 321
109. Lenti elettrostatiche . . . . . » 324
110. Lenti magnetiche . . . . . » 328
111. Deflessione elettrostatica . . . . . » 329
112. Deflessione magnetica . . . . . » 331
113. Tubi a raggi catodici . . . . . » 333
114. Impiego dei tubi a raggi catodici come oscillografi . . . . . » 336
115. Cenni sul microscopio elettronico . . . . . » 339

Cap. XIV - Dispositivi fotoelettrici

116. Effetti fotoelettrici. Emissione fotoelettronica . . . . . pag. 341
117. Cellule fotoemissive . . . . . » 342
118. Cellule fotoconduttrici . . . . . » 345
119. Cellule fotovoltaiche . . . . . » 347
120. Fotodiodi e fototransistori . . . . . » 348
121. Fotomoltiplicatori elettronici . . . . . » 350

Indice analitico del I volume . . . . . » 353

CAPITOLO I

FORME D'ONDA

1. – *Generalità sulle forme d'onda.*

Si dice *forma d'onda* di tensione o d'intensità di corrente l'insieme dei valori che la tensione o l'intensità di corrente assumono nel tempo. Una forma d'onda può essere espressa analiticamente: $v = v(t)$ oppure $i = i(t)$; o può essere rappresentata graficamente su un sistema di assi coordinati cartesiani. È evidente che, potendo essere infinite le funzioni $v = v(t)$ oppure $i = i(t)$, infinite saranno le forme d'onda; alcune di esse sono però caratteristiche e di più comune impiego nei circuiti elettronici.

Di ogni forma d'onda si possono indicare:

a) il *valore istantaneo* v od i, che è il valore assunto istante per istante;

b) il *periodo* T se la forma d'onda è periodica, cioè riprende i medesimi valori istantanei ad intervalli uguali di tempo;

c) la *frequenza* f che è l'inverso del periodo;

d) il *valor massimo*, V_M o I_M, che è il più grande dei valori istantanei di un periodo;

e) il *valor medio*, V_m o I_m, che rappresenta la media dei valori istantanei di un intero periodo;

f) il *valore efficace*, V o I, che rappresenta la radice quadrata della media dei quadrati dei valori istantanei di un intero periodo.

Qualora la forma d'onda sia esprimibile analiticamente in funzione del tempo, il *valor medio* si calcola con le espressioni:

$$V_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v dt$$

1.1

$$I_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i dt$$

che, sostituendo all'occorrenza gli angoli elettrici (in radianti) al tempo, si tra-

sformano nelle:

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v d\alpha$$

1.2

$$I_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} i d\alpha$$

in cui α tiene il posto dell'istante generico t e 2π corrisponde al periodo T.

Se invece si conosce la rappresentazione grafica della forma d'onda, se ne può determinare il valor medio con un metodo approssimato. Se per esempio è data la forma d'onda di tensione rappresentata in fig. 1.1, supposta periodica

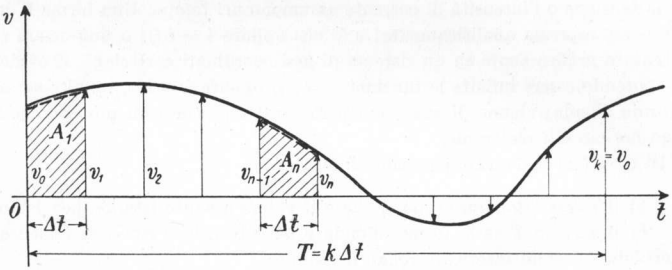


Fig. 1.1 – Forma d'onda periodica (di tensione).

di periodo T, il valor medio può essere calcolato come media aritmetica delle k ordinate $(v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1})$ corrispondenti agli istanti iniziali dei k intervalli di durata $\Delta t = T/k$ in cui è stato suddiviso l'intero periodo. Le formule da applicarsi sono quindi:

$$V_m = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} v_n$$

1.3

$$I_m = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} i_n \, .$$

L'approssimazione che si raggiunge nel risultato cresce con il numero delle parti k in cui è stato suddiviso il periodo [1].

---

[1] Le 1.3 si giustificano molto facilmente. Se per esempio, sempre facendo riferimento alla fig. 1.1, si vuole calcolare l'area A_1 corrispondente al primo intervallo, si può scrivere:

$$A_1 = \frac{v_0 + v_1}{2}\Delta t$$

che evidentemente è l'area del trapezio di altezza Δt e basi v_0 e v_1 ottenuto sostituendo

Il valor medio rappresenta la componente continua della forma d'onda considerata. Si definisce *alternata* una forma d'onda periodica che abbia valor medio nullo.

Per quanto riguarda il *valore efficace* (1) si possono usare le espressioni:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v^2 dt}$$

1.4

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} i^2 dt}$$

se si assume come variabile indipendente il tempo t. Se invece si esegue la sostituzione con gli angoli elettrici (in radianti), le 1.4 divengono:

$$V = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v^2 d\alpha}$$

1.5

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} i^2 d\alpha} \; .$$

Se poi la forma d'onda è conosciuta solo graficamente si ha:

$$V = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} v_n^2}$$

1.6

$$I = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} i_n^2} \; .$$

---

alla forma d'onda effettiva il segmento di retta congiungente le ordinate estreme.

Analogamente per il generico intervallo n sarà:

$$A_n = \frac{v_{n-1} + v_n}{2} \Delta t$$

L'area complessiva A risulta dalla somma delle singole A_n (il cui numero è k). È facile verificare che in tale somma tutte le ordinate compaiono due volte, compresa la v_0 che, per la periodicità della funzione, si identifica con la v_k . Si ha quindi in definitiva:

$$A = \Delta t \sum_{n=0}^{k-1} v_n$$

Sostituendo poi in quest'ultima relazione $\Delta t = T/k$, e dividendo l'area così trovata per il periodo T si giunge infine alla prima delle 1.3.

Le sommatorie che compaiono nelle 1.3 sono sommatorie algebriche; ad ogni ordinata occorre far corrispondere un segno: positivo se al di sopra, negativo se al disotto dell'asse delle ascisse.

(1) Si ricordi che il *valore efficace* di una tensione o di una intensità di corrente periodica ha un significato energetico molto importante. Esso è pari a quel valore di tensione o di intensità di corrente continua che, interessando una assegnata resistenza, vi produrrebbe una dissipazione di potenza uguale a quella prodotta mediamente nel periodo T nella medesima resistenza dalla tensione o dalla intensità di corrente periodica.

Se da tutti i valori istantanei di una forma d'onda periodica non alternata si sottrae il valor medio, o componente continua, la nuova forma d'onda che si ottiene è alternata. Se si indica con v_{ca} e con i_{ca} il valore istantaneo di questa nuova forma d'onda (fig. 1.2) si hanno le relazioni:

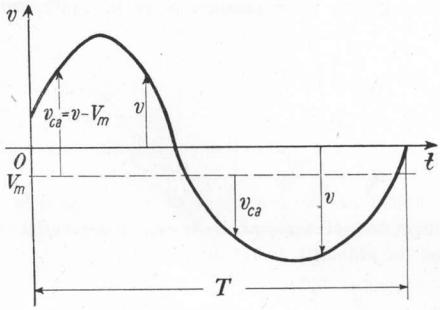


Fig. 1.2 – Scomposizione di una forma d'onda periodica nella componente continua e nella componente alternata.

$$1.7 \qquad v_{ca} = v - V_m \qquad i_{ca} = i - I_m \, .$$

All'occorrenza si determina il valore efficace della sola componente alternata mediante le espressioni:

$$1.8 \qquad V_{ca} = \sqrt{V^2 - V_m^2} \ (^1) \qquad I_{ca} = \sqrt{I^2 - I_m^2}$$

2. – *Forma d'onda sinusoidale.*

La *forma d'onda sinusoidale*, rappresentata in fig. 2.1, si ha allorchè la grandezza in esame (tensione o intensità di corrente) è una funzione sinusoidale del tempo t. Per una tensione sinusoidale si può scrivere:

$$1.2 \qquad v = V_M \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) \, .$$

Nella relazione precedente v è il valore istantaneo, V_M il valor massimo, ω la pulsazione data da

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \, .$$

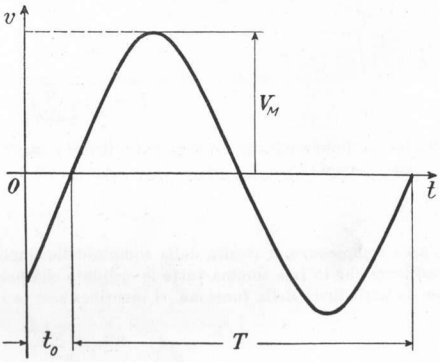


Fig. 2.1 – Forma d'onda sinusoidale.

L'angolo φ rappresenta la fase della tensione sinusoidale: esso corrisponde al tempo t_0, contato a partire dall'origine dei tempi ($t = 0$, istante in cui si inizia

(1) Difatti dalla prima delle 1.7 si ottiene:

$$v = v_{ca} + V_m$$

ad esaminare la tensione), dopo il quale la tensione sinusoidale passa per la prima volta per lo zero con derivata positiva. Facendo corrispondere al periodo 2π radianti, risulta

$$\varphi = 2\pi \frac{t_0}{T} .$$

Se si deve considerare una sola grandezza sinusoidale riesce più comodo prendere come istante iniziale quello nel quale il valore istantaneo si annulla, avendosi così $t_0 = 0$ e $\varphi = 0$. La 2.1 si semplifica nella

2.2 $$v = V_M \operatorname{sen} \omega t .$$

Se invece si devono considerare contemporaneamente diverse grandezze, la fase di una di esse può essere assunta uguale a zero, mentre le fasi delle altre saranno determinate dal reciproco spostamento nel tempo.

La forma d'onda sinusoidale è alternata: il suo valor medio è nullo. Tuttavia occorre alcune volte prenderne in esame il *valor medio convenzionale*, che è il valor medio di un solo semiperiodo. Risulta:

$$V_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} v dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_M \operatorname{sen} \omega t dt$$

che integrato dà:

2.3 $$V_m = \frac{2}{\pi} V_M = 0{,}636\ V_M \qquad \text{(valor medio convenzionale).}$$

Per il valore efficace si ha invece:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \operatorname{sen}^2 \omega t dt}$$

che integrato dà:

2.4 $$V = \frac{\sqrt{2}}{2} V_M = \frac{1}{\sqrt{2}} V_M = 0{,}707\ V_M .$$

---

ed elevando ambo i membri al quadrato:

$$v^2 = v_{ca}^2 + V_m^2 + 2 v_{ca} V_m$$

Si prendano ora i valori medi di entrambi i membri. Per definizione i valori medi di v^2 e di v_{ca}^2 sono rispettivamente V^2 e V_{ca}^2, mentre il valor medio di V_m^2 che è una costante è ancora V_m^2 . Per l'ultimo termine del secondo membro si osservi che il suo valor medio è nullo, tale essendo il valor medio della componente alternata v_{ca} che vi compare. È quindi:

$$V^2 = V_{ca}^2 + V_m^2$$

da cui si ricava la 1.8.

La forma d'onda sinusoidale ha una grande importanza perchè è l'unica forma d'onda che non subisce deformazioni nel passaggio attraverso una rete elettrica lineare ed inoltre perchè molto spesso lo studio di altre forme d'onda si può ricondurre a quello delle forme d'onda sinusoidali.

Per un'intensità di corrente sinusoidale valgono relazioni analoghe a quelle scritte per una tensione sinusoidale.

3. – *Gradino di tensione o di corrente.*

Si dice *gradino* (o scalino) *di tensione* di altezza V_0 il passaggio istantaneo di una tensione dal valore zero al valore finito V_0.

Analiticamente riesce utile la considerazione della *funzione unitaria* $1(t)$, intesa come quella funzione che risulta uguale a zero per $t < 0$ ed uguale ad uno per $t \geq 0$ (fig. 3.1).

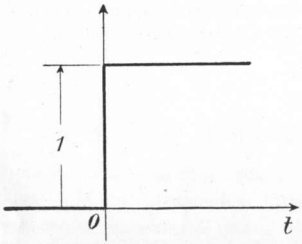


Fig. 3.1 – Funzione unitaria.

Moltiplicando la funzione unitaria per l'unità di misura di una grandezza si ha la *grandezza unitaria*. Ad esempio, moltiplicando $1V$ per $1(t)$ si ha la tensione unitaria $1.1(t)$. Se poi si moltiplica questa grandezza unitaria per un certo numero si ha il gradino della grandezza considerata. Ad esempio, moltiplicando la tensione unitaria per 10 si ottiene $10.1(t)$ che rappresenta un gradino di tensione di ampiezza $10V$ (fig. 3.2), ossia una tensione nulla per $t < 0$ e di $10V$ per $t \geq 0$.

Il gradino di tensione può anche essere negativo (fig. 3.3) in conseguenza

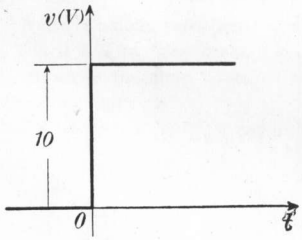


Fig. 3.2. – Gradino di tensione.

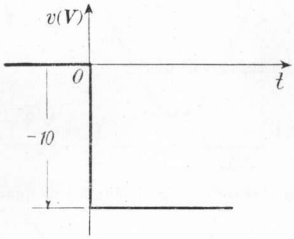


Fig. 3.3 – Gradino negativo di tensione.

del segno negativo del valore della tensione che moltiplica la funzione unitaria $1(t)$.

La sovrapposizione di gradini di tensione aventi origini diverse dà luogo

a varie forme d'onda. Ad esempio, sovrapponendo al gradino di tensione $2.1(t)$ che ha origine per $t = 0$ il gradino $3.1(t - t_0)$ che ha origine per $t = t_0$ si ha

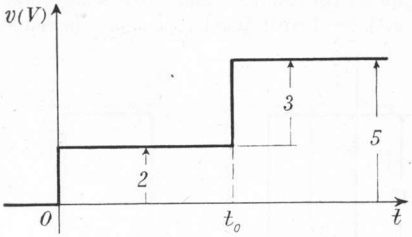


Fig. 3.4 – Sovrapposizione di gradini di tensione.

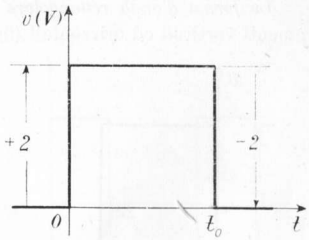


Fig. 3.5 – Sovrapposizione di gradini di tensione di valore assoluto uguale e di segno contrario.

la forma d'onda rappresentata in fig. 3.4. Se invece al gradino di tensione $2.1(t)$ si aggiunge il gradino $-2.1(t - t_0)$ si ha la forma d'onda rappresentata in figura 3.5.

Se si moltiplica la funzione unitaria per un'altra funzione $f(t)$ del tempo si ottiene una funzione che per $t < 0$ è nulla, per $t = 0$ invece è $f(0)$ ed è uguale a $f(t)$ per $t > 0$. Ad esempio, se si moltiplica la tensione lineare $v = kt$ (fig. 3.6, *a*) per la funzione unitaria $1(t)$ (fig. 3.6, *b*) si ottiene la tensione lineare

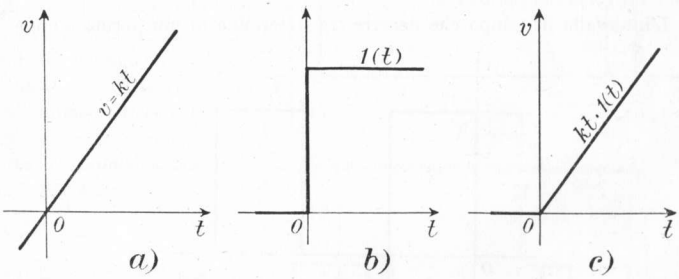


Fig. 3.6 – Prodotto di una funzione qualsiasi per una funzione unitaria.

$v = kt.1(t)$ (fig. 3.6, *c*) che si annulla per $t < 0$. Si possono in tal modo costruire funzioni di forme molto diverse.

Tutto quanto è stato detto per un gradino di tensione di ampiezza V_0 si potrebbe ripetere riferendolo ad un gradino di corrente di ampiezza I_0 .

4. – *Forma d'onda rettangolare.*

La *forma d'onda rettangolare* è quella costituita da una successione di segmenti verticali ed orizzontali (fig. 4.1). Se si ripete nel tempo si dice periodica

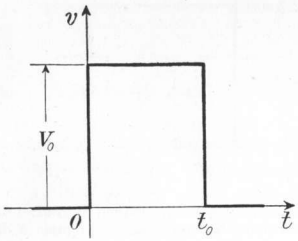


Fig. 4.1 – Forma d'onda rettangolare.

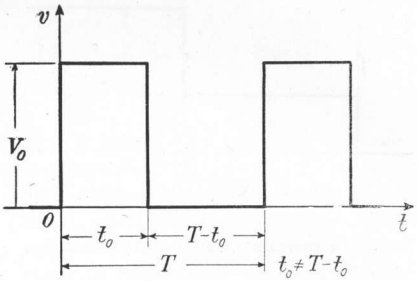


Fig. 4.2 – Forma d'onda rettangolare periodica asimmetrica.

(fig. 4.2), intendendo per periodo T l'intervallo di tempo compreso tra gli inizi di due forme d'onda immediatamente susseguentisi.

Elementi caratteristici della forma d'onda rettangolare sono:

a) l'*ampiezza* V_0;

b) la *durata* t_0;

c) per le forme d'onda periodiche la *frequenza* o cadenza di ripetizione f che è l'inverso del periodo T.

L'intervallo di tempo che decorre tra il termine di una forma d'onda ret-

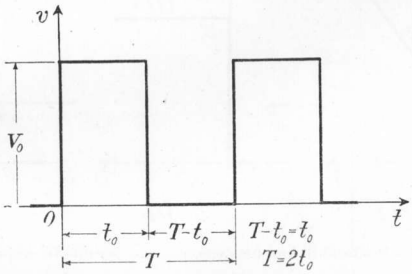


Fig. 4.3 – Forma d'onda rettangolare periodica simmetrica.

tangolare e l'inizio di quella immediatamente successiva è dato da $T - t_0$. Se è $t_0 = T - t_0$, ossia $T = 2t_0$, la forma d'onda si dice *simmetrica* (fig. 4.3); diversamente si dice *asimmetrica* (fig. 4.2).

Occorre tener presente che per ampiezza della forma d'onda rettangolare si intende il dislivello tra i successivi segmenti orizzontali, indipendentemente dalla loro posizione rispetto all'asse dei tempi e quindi indipendentemente dal valor medio della forma d'onda (fig. 4.4 e fig. 4.5) [1].

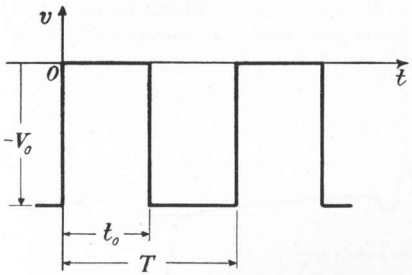


Fig. 4.4 – Forma d'onda rettangolare negativa.

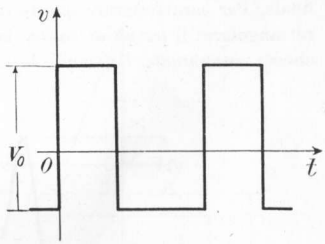


Fig. 4.5 – Forma d'onda rettangolare a valori istantanei sia positivi che negativi.

Se il valore istantaneo è sempre positivo la forma d'onda rettangolare si dice *positiva* (fig. 4.3), in caso contrario *negativa* (fig. 4.4).

Se è $T - t_0 \gg t_0$ (ad esempio, $T - t_0 > 10t_0$) si ha una *successione di impulsi rettangolari* (fig. 4.6), indicando il termine *impulso* una forma d'onda di breve durata nei confronti del periodo.

Infine se l'intervallo tra gli impulsi è irregolare si ha una *successione aperiodica di impulsi rettangolari* (fig. 4.7).

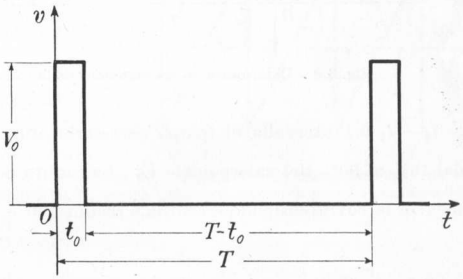


Fig. 4.6 – Successione di impulsi rettangolari.

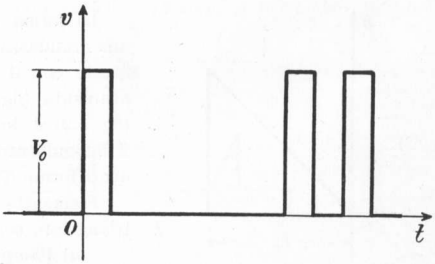


Fig. 4.7 – Successione aperiodica di impulsi rettangolari.

---

[1] L'ampiezza V_0 così considerata assume anche il nome di *valore picco-picco* della forma d'onda. La stessa definizione può essere usata per le altre forme d'onda; ad esempio, per la forma d'onda sinusoidale il valore picco-picco risulta il doppio del valor massimo.

Difficilmente la forma d'onda rettangolare risulta in pratica perfetta ossia a segmenti perfettamente verticali od orizzontali (rispetto all'asse dei tempi), anzi i tratti che la compongono non sono nemmeno sempre rettilinei specialmente nelle vicinanze degli spigoli che molto spesso risultano arrotondati; altre volte si verifica una oscillazione del valore istantaneo attorno al valore finale. Per caratterizzare queste deformazioni si usa dare di una forma d'onda rettangolare: il *tempo di salita*, la *caduta percentuale* e la *sovratensione* (overshoot) *percentuale*. Seguendo le indicazioni di fig. 4.8, il tempo di salita $t_s =$

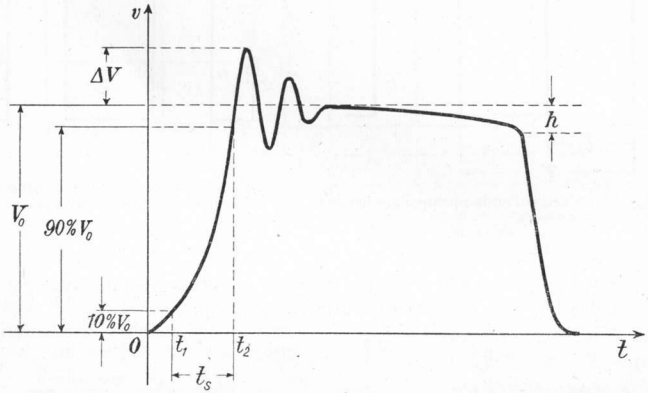


Fig. 4.8 – Deformazioni caratteristiche della forma d'onda rettangolare.

$= t_2 - t_1$ è l'intervallo di tempo necessario affinché il valore istantaneo passi dal 10% al 90% del valore finale V_0. La caduta percentuale è data da $100 \dfrac{h}{V_0}$, mentre la sovratensione percentuale risulta $100 \dfrac{\Delta V}{V_0}$.

5. – *Forma d'onda triangolare.*

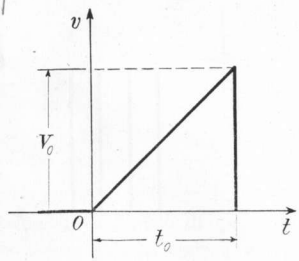


Fig. 5.1 – Forma d'onda triangolare.

La *forma d'onda triangolare* è quella di una grandezza che, variabile dapprima linearmente con il tempo, si annulla poi istantaneamente (fig. 5.1). Se si ripete nel tempo (fig. 5.2) si dice periodica, avendo il periodo T il significato già attribuitogli per le precedenti forme d'onda periodiche.

Elementi caratteristici della forma d'onda triangolare sono:

a) l'*ampiezza* V_0;

b) la *durata* t_0;

c) per le forme d'onda periodiche la *frequenza* o cadenza di ripetizione f.

Se è $T = t_0$ la forma d'onda triangolare periodica si dice anche *a dente di sega* (fig. 5.3).

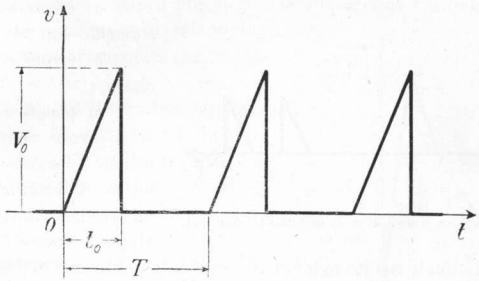


Fig. 5.2 - Forma d'onda triangolare periodica.

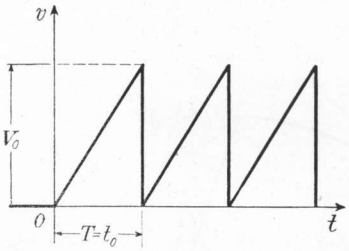


Fig. 5.3 - Forma d'onda a dente di sega.

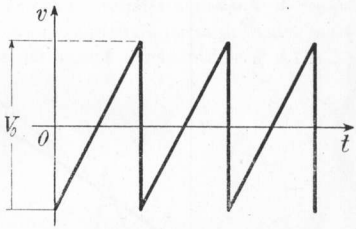


Fig. 5.4 - Forma d'onda triangolare (a dente di sega) a valori istantanei sia positivi che negativi.

Anche per la forma d'onda triangolare l'ampiezza V_0 è indipendente dalla posizione dell'asse dei tempi (fig. 5.4).

Se è $T \gg t_0$ si ha la *successione periodica di impulsi triangolari* (fig. 5.5).

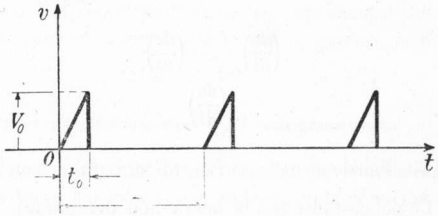


Fig. 5.5 - Successione periodica di impulsi triangolari.

Infine se l'intervallo tra gli impulsi è irregolare si ha la *successione aperiodica di impulsi triangolari* (fig. 5.6).

Le deformazioni della forma d'onda triangolare vengono caratterizzate da:

a) errore relativo di spostamento e_s;

b) errore relativo di velocità e_v;

c) tempo di discesa t_d .

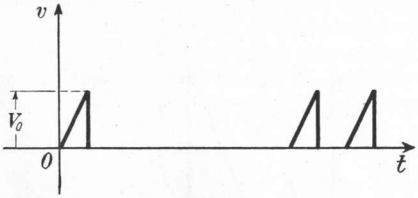


Fig. 5.6 – Successione aperiodica di impulsi triangolari.

L'errore relativo di spostamento e l'errore relativo di velocità determinano lo scostamento dalla linearità del fronte di salita. Facendo riferimento alla fig. 5.7 (dalla quale risulta evidente il significato del tempo di discesa t_d) l'errore relativo di spostamento è dato da $e_s = \frac{\Delta V}{V_0}$, essendo V_0 l'ampiezza che avrebbe

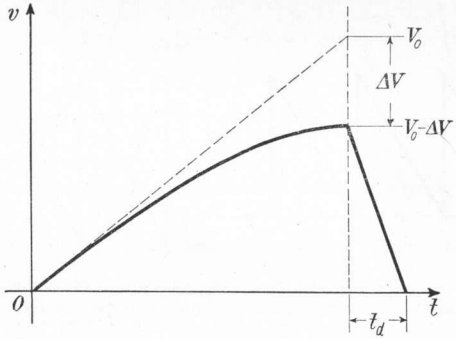


Fig. 5.7 – Deformazioni caratteristiche della forma d'onda triangolare.

la forma d'onda triangolare con deformazione nulla e ΔV lo scostamento da V_0 della forma d'onda deformata. L'errore relativo di velocità è dato invece da:

$$e_v = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} - \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=T^-}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}}$$

in cui $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}$ è l'inclinazione della curva (deformata e non deformata) nel punto iniziale (ed è poi costante per la curva non deformata), mentre $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=T^-}$ è l'inclinazione della curva deformata nel punto di massimo.

6. – *Impulsi.* NO

È stato accennato che generalmente si dice *impulso* una forma d'onda in cui la durata del segnale è molto più piccola dell'intervallo tra due segnali consecutivi. Si hanno così impulsi rettangolari (fig. 4.6), impulsi triangolari (fig. 5.5), ecc.

Più spesso però con il termine impulso si intende riferirsi ad una forma d'onda con un rapido fronte di salita seguito da un decremento esponenziale (fig. 6.1). Elementi caratteristici dell'impulso sono:

a) l'*ampiezza* V_0;

b) la *frequenza* f od il periodo T (figura 6.2);

c) la *durata* dell'impulso.

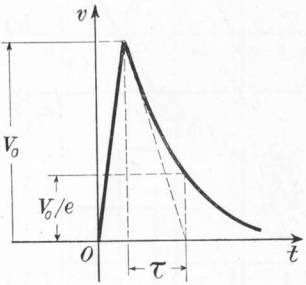


Fig. 6.1 – Impulso.

Se il decadimento è esponenziale, la durata dell'impulso è teoricamente infinita; si assume come grandezza significativa la cosiddetta *costante di tempo* τ che è l'intervallo di tempo durante il quale la tensione v passa dal valor massimo V_0 al valore V_0/e (essendo e la base dei logaritmi naturali: $e = 2{,}718....$)

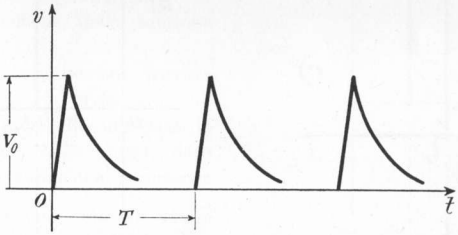


Fig. 6.2 – Successione periodica di impulsi.

Geometricamente la costante di tempo si può ottenere conducendo la tangente all'esponenziale nel suo punto iniziale: la distanza dell'intersezione di questa tangente con l'asse dei tempi dall'ascissa corrispondente all'ordinata V_0 (da cui ha inizio il decremento esponenziale) misura appunto τ (fig. 6.1).

NO

7. – *Forme d'onda di derivazione e di integrazione.*

Alcuni circuiti operano sulla forma d'onda che li attraversa l'operazione di derivazione (o quasi-derivazione, se soltanto ci si avvicina alla operazione ideale di derivazione). È quindi opportuno conoscere la deformazione che su-

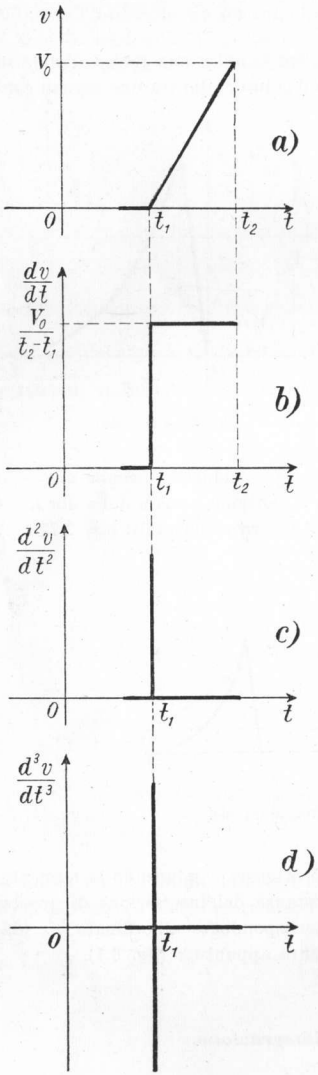


Fig. 7.1 – Derivazioni successive.

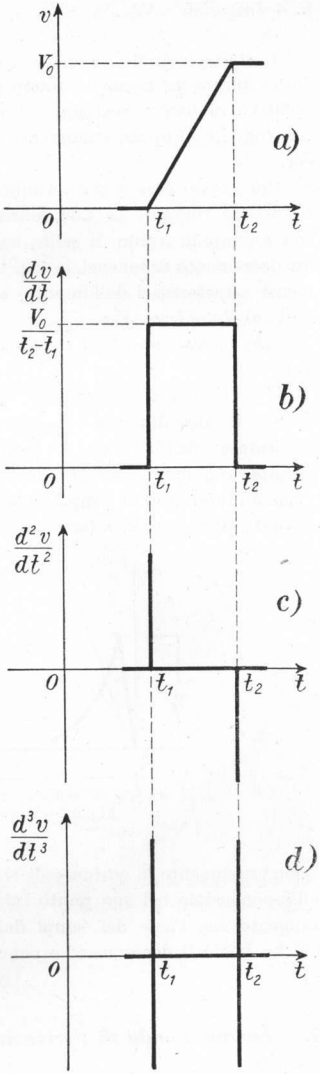


Fig. 7.2 – Derivazioni successive.

biscono attraverso tali circuiti le forme d'onda più caratteristiche in modo da potere all'occorrenza prevedere, almeno qualitativamente, la forma d'onda in uscita da un circuito dalla conoscenza della forma d'onda in entrata.

Sia linearmente crescente (fig. 7.1, *a*) la tensione di ingresso ad un circuito derivatore. Essendo V_0 l'ampiezza e $t_2 - t_1$ il tempo in cui la tensione passa dal valore zero al valore V_0, il valore istantaneo della tensione a partire dall'istante t_1 sarà espresso da $v = \frac{V_0}{t_2 - t_1}(t - t_1)$. La derivata di questa espressione sarà $\frac{dv}{dt} = \frac{V_0}{t_2 - t_1}$ costante per tutto l'intervallo $t_2 - t_1$ (fig. 7.1, *b*). Quindi la derivata di una tensione crescente linearmente è un gradino di ampiezza pari all'inclinazione della tensione medesima.

Se ora è il gradino così trovato ad essere inviato in ingresso ad un circuito derivatore, l'uscita sarà la derivata di esso. Nell'istante t_1, dato che si ha la variazione istantanea della $\frac{dv}{dt}$ dal valore zero al valore $\frac{V_0}{t_2 - t_1}$, la derivata $\frac{d^2v}{dt^2}$ assumerà valore infinito; tornerà poi immediatamente a zero mantenendosi tale per tutta la durata del gradino (fig. 7.1, *c*).

Si possono ora ripetere le stesse considerazioni supponendo che la tensione v, raggiunto linearmente il valore V_0, si mantenga costante. Risultano in tal modo definite anche le successive derivate di facile dedu-

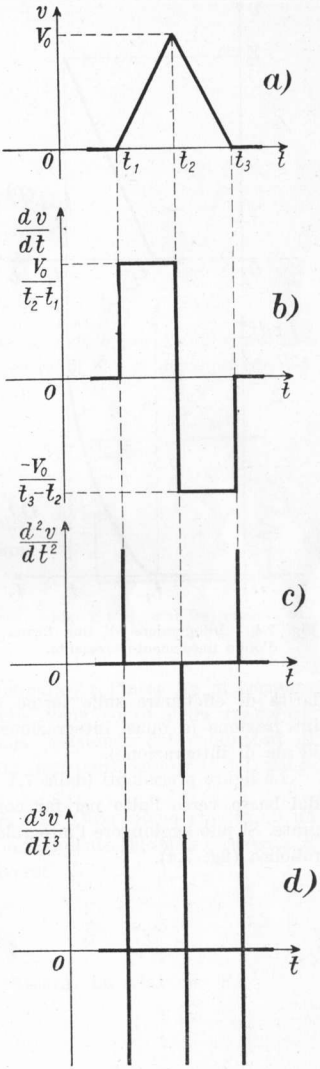


Fig. 7.3 - Derivazioni successive.

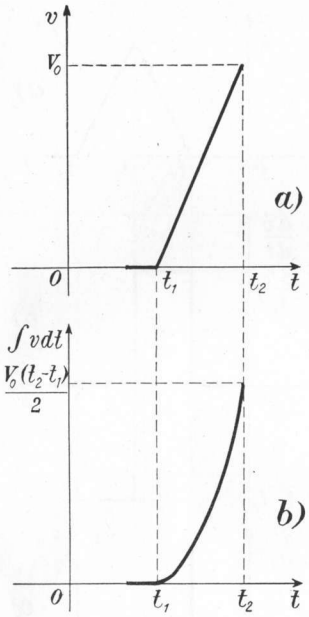


Fig. 7.4 - Integrazione di una forma d'onda linearmente crescente.

zione (fig. 7.2). La prima derivata risulta un impulso rettangolare, mentre la successiva derivata è costituita da due impulsi di durata infinitesima, ampiezza infinita e segno contrario situati nel tempo rispettivamente negli istanti t_1 e t_2.

Poiché diminuendo l'intervallo $t_2 - t_1$ la tensione lineare assume un fronte di salita più verticale, ossia aumenta la sua inclinazione, aumenta pure l'ampiezza dell'impulso rettangolare che ne costituisce la derivata, mentre si avvicinano nel tempo i due impulsi che costituiscono la derivata seconda. Al limite, per $t_2 - t_1$ tendente a zero, la tensione lineare diviene un gradino di tensione, la sua derivata un impulso di ampiezza infinita e durata infinitesima ed infine la derivata di quest'ultimo risulta un doppietto di impulsi, uno positivo e l'altro negativo (fig. 7.1, *d* e fig. 7.2, *d*).

Se al fronte lineare di salita segue immediatamente il fronte lineare di discesa con inclinazione uguale ma di segno contrario, le successive derivate che si ottengono si presentano come in fig. 7.3.

Alcuni circuiti presentano la particolarità di effettuare sulle forme d'onda che li attraversano l'operazione di integrazione (o quasi integrazione, se soltanto ci si avvicina alla operazione ideale di integrazione).

Le figure precedenti (dalla 7.1 alla 7.3) possono servire anche ora partendo dal basso verso l'alto per far conoscere forme d'onda successivamente integrate. Si può aggiungere l'integrale della funzione lineare che è la funzione parabolica (fig. 7.4).

CAPITOLO II

ELEMENTI CIRCUITALI

8. – *Resistenze.*

Sia dato un circuito elettrico in cui agiscono una o più f.e.m. continue; l'intensità di corrente o le varie intensità di corrente che si determinano nel circuito dipendono dai valori delle varie f.e.m.

Se ci si riferisce al semplicissimo circuito di fig. 8.1, la relazione di dipendenza dell'intensità di corrente dalla f.e.m. è una relazione di diretta proporzionalità in cui interviene come coefficiente di proporzionalità la resistenza del circuito. Ne discende la fondamentale legge di Ohm che nel caso in esame si può scrivere:

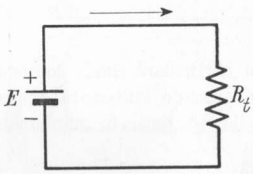


Fig. 8.1 – Semplice circuito con resistenza.

$$I = \frac{E}{R_t},$$

in cui E rappresenta la f.e.m. presente nel circuito, I l'intensità di corrente ed R_t la resistenza complessiva del circuito che tiene conto della resistenza di utilizzazione, della resistenza dei conduttori di collegamento e della resistenza interna del generatore.

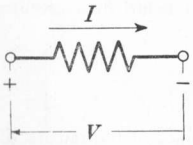


Fig. 8.2 – Tratto di circuito con resistenza.

Se invece la legge di Ohm viene riferita ad un tratto di circuito comprendente solo una resistenza R (fig. 8.2) si può scrivere:

$$I = \frac{V}{R}$$

essendo V la d.d.p. agente ai capi della resistenza. La relazione

8.1 $$R = \frac{V}{I}$$

che si ricava dall'espressione precedente può servire come definizione di resistenza. Il valore R di questa dipende dalla natura fisica e dalla costituzione geometrica dell'elemento materiale, indicato con il nome di *resistore*, che nel

circuito si oppone al passaggio della corrente. La legge di questa dipendenza si esprime nella formula:

8.2 $$R = \varrho \frac{l}{S}$$

in cui ϱ indica la resistività (o resistenza specifica) del materiale di cui è costituito il conduttore del resistore, l la sua lunghezza ed S la sua sezione. La resistività del conduttore è una grandezza il cui valore si ricava sperimentalmente e si può definire come la resistenza offerta da un conduttore del materiale in esame avente lunghezza unitaria e sezione unitaria.

Il passaggio della corrente elettrica attraverso un resistore determina un consumo di energia elettrica, che si trasforma in energia termica o calore. Riferendosi all'unità di tempo si può determinare la potenza elettrica che in un conduttore si trasforma in potenza termica (secondo la legge di Joule) mediante una delle seguenti espressioni equivalenti:

$$P = VI \qquad P = \frac{V^2}{R} \qquad P = RI^2$$

In particolare riesce comoda l'ultima delle precedenti relazioni che permette, conoscendo l'intensità di corrente e la potenza dissipata, di risalire al valore della resistenza in maniera molto semplice:

8.3 $$R = \frac{P}{I^2}.$$

Anzi, ogni volta che vi sarà discrepanza tra i valori di resistenza individuati o con la 8.1 o con la 8.2 o con la 8.3, si riterrà come valore effettivo quello dato dalla 8.3. In tal modo si attribuisce alla resistenza come caratteristica preminente quella di essere un elemento dissipativo di energia elettrica.

Nei circuiti elettrici funzionanti in corrente alternata i valori di resistenza calcolati secondo le formule precedenti:

$$R = \frac{V}{I} \qquad R = \varrho \frac{l}{S} \qquad R = \frac{P}{I^2}$$

(in cui V ed I rappresentano i valori efficaci della tensione e dell'intensità di corrente) non concordano più tra loro per varie cause tra le quali assume particolare importanza il cosiddetto effetto pellicolare. Tuttavia, per quanto detto sopra, si riterrà valida la 8.3, assegnando alla resistenza la responsabilità di ogni dissipazione di potenza dovuta al passaggio della corrente nella resistenza stessa.

Occorre notare che per un medesimo resistore il valore di resistenza dato dalla 8.3 è diverso secondo se la misura è stata effettuata in corrente continua od in corrente alternata. Più esattamente si ha un aumento della resistenza passando dalla corrente continua alla corrente alternata; aumento tanto più grande quanto più grande è la frequenza. Alle cause di questo aumento della resistenza si riferiscono i paragrafi seguenti.

Manno

9. – *Effetto pellicolare.*

Quando un conduttore è percorso da corrente continua di intensità I, la sua sezione S è uniformemente interessata, ossia la densità di corrente è la medesima in ogni punto della sezione del conduttore ed ha valore I/S. Quando invece il medesimo conduttore è percorso da corrente alternata, la distribuzione di corrente non è più uniforme ma la densità è variabile da punto a punto crescendo dall'interno verso la parte periferica del conduttore. Si ha quindi un addensamento della corrente sulla superficie esterna, o pelle, del conduttore, per cui il fenomeno prende il nome di *effetto pellicolare.*

Questo fenomeno è di natura elettromagnetica ed ha luogo o per autoinduzione del conduttore su se stesso (ed è l'effetto pellicolare propriamente detto) o per induzione mutua tra due conduttori vicini (ed allora prende il nome di *effetto di vicinanza*).

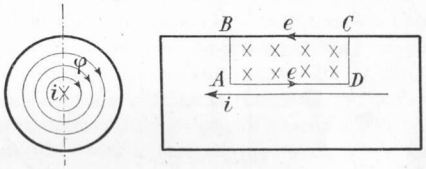


Fig. 9.1 – Effetto pellicolare.

Il conduttore a sezione circolare, di cui in fig. 9.1 è indicata una sezione trasversale ed una sezione longitudinale, sia interessato dalla corrente alternata sinusoidale di valore istantaneo i, rappresentata in fig. 9.2, e inizialmente si supponga che essa sia distribuita uniformemente. Si isoli idealmente nel conduttore una spira qualsiasi, ad esempio quella rettangolare $ABCD$ individuata da due raggi paralleli AB e CD e dai segmenti assiale e periferico che ne congiungono gli estremi. Questa spira è interessata dal flusso φ prodotto dalla corrente di intensità i, proporzionalmente alla quale varia in ampiezza. Nel primo quarto di periodo $\left(0, \frac{T}{4}\right)$ il flusso φ va aumentando. La spira reagisce con una f.e.m. indotta che, secondo la legge di Lenz, è tale da opporsi all'aumento del flusso φ. Si origina nella spira una f.e.m. il cui verso è quello indicato in fig. 9.1. Attribuendo un segno alla f.e.m. e con riferimento al verso assunto lungo il tratto assiale, essa sarà negativa per tutto il primo quarto di periodo. Durante il secondo quarto di periodo, poiché l'intensità i diminuisce, la f.e.m. e cambierà verso. Ragionando allo stesso modo per gli altri

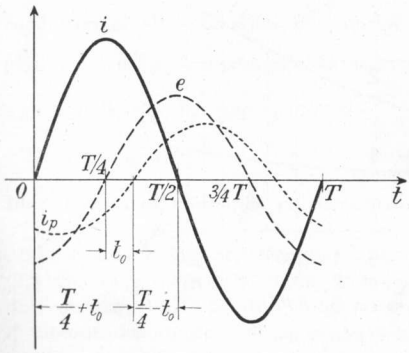


Fig. 9.2 – Grandezze elettriche che intervengono nell'effetto pellicolare.

due quarti di periodo si può concludere (fig. 9.2) che la f.e.m. e indotta lungo l'asse del conduttore è sfasata di un quarto di periodo in ritardo rispetto alla corrente i. Nella spira in esame la f.e.m. indotta dà luogo ad una corrente indotta la cui intensità i_p, condizionata dalla resistenza e dalla induttanza della spira, sarà in ritardo nei riguardi della e di un tempo t_0, funzione del rapporto tra la reattanza e la resistenza della spira. Si nota quindi che per ogni semiperiodo lungo l'asse della spira la corrente principale i e la corrente indotta i_p sono tra loro concordi per un intervallo di tempo $\frac{T}{4} - t_0$, minore di un quarto

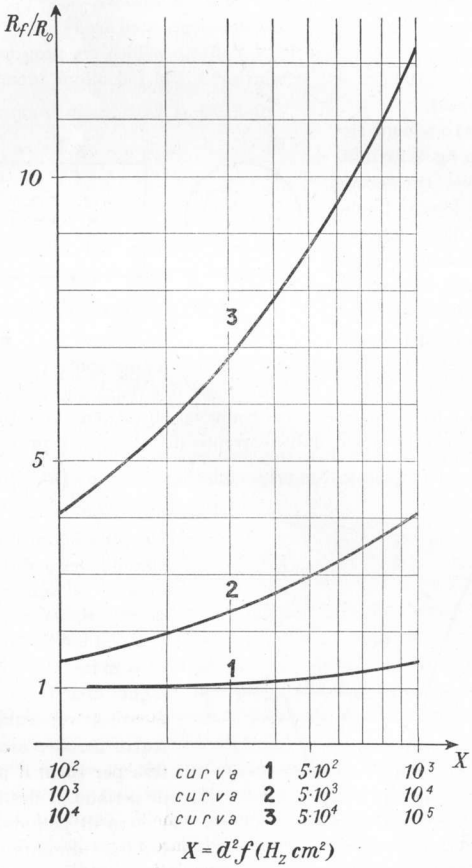


Fig. 9.3 – Variazione della resistenza di un conduttore per effetto pellicolare.

di periodo, mentre sono tra loro discordi per un intervallo di tempo $\frac{T}{4} + t_0$, maggiore di un quarto di periodo. Questo bilancio dice che mediamente nel periodo la corrente nel conduttore risulta ridotta verso il centro; eseguendo un analogo ragionamento per il tratto BC della spira si sarebbe invece trovato che mediamente la corrente viene ad addensarsi alla superficie del conduttore.

Da quanto detto si può dedurre che l'effetto pellicolare dipende dalle seguenti grandezze: frequenza f della corrente, diametro d del conduttore, resistenza specifica ϱ e permeabilità magnetica μ del materiale di cui è composto il conduttore.

L'effetto pellicolare aumenta con l'aumentare della frequenza perché con questa aumenta l'ampiezza della f.e.m. indotta e, e quindi anche l'ampiezza della conseguente i_p. Inoltre con la frequenza aumenta pure la reattanza e quindi il ritardo t_0 prima esaminato. L'effetto pellicolare aumenta con il diametro d del conduttore in quanto con esso aumenta la superficie di ogni spira individuata nell'interno del conduttore, e quindi aumenta il flusso φ e di conseguenza la corrente indotta i_p. L'effetto pellicolare aumenta ancora con l'aumentare della permeabilità magnetica μ del conduttore perché con essa aumenta il flusso φ. Infine l'effetto pellicolare diminuisce con l'aumentare della resistenza specifica ϱ perché, a parità di f.e.m. e, risulta inferiore la corrente i_p, ed inoltre riducendosi il rapporto reattanza-resistenza si riduce pure il ritardo t_0. Si può quindi affermare che l'effetto pellicolare sarà minore alle frequenze più basse, in conduttori di piccolo diametro, di materiale non ferromagnetico, di elevata resistività.

La riduzione della sezione utile del conduttore dovuta all'effetto pellicolare porta ad un aumento del valore R_f della resistenza ad una certa frequenza f, rispetto alla resistenza R_0 che il medesimo conduttore presenta in corrente continua. Una valutazione approssimata del rapporto R_f/R_0 si può avere dal grafico di fig. 9.3, in cui il rapporto è dato in funzione del prodotto d^2f. Il grafico è valido per conduttori di rame avente resistività $\varrho = 0{,}0174\ \Omega \frac{mm^2}{m}$. Per i conduttori di altro materiale può ancora servire purché in ascisse si legga $fd^2\mu_r \frac{\varrho}{\varrho_x}$, in cui μ_r è la permeabilità relativa del materiale, ϱ_x è la sua resistività e ϱ è la resistività del rame $\left(0{,}0174\ \Omega \frac{mm^2}{m}\right)$.

10. – *Effetto di vicinanza ed altre cause di aumento della resistenza.*

La riduzione della sezione utile di un conduttore si può avere per effetto di vicinanza a causa della mutua induzione tra due conduttori affiancati. I due conduttori della fig. 10.1 siano percorsi nello stesso verso dalla corrente di intensità istantanea i. Si supponga di isolare idealmente nel conduttore di destra una spira rettangolare avente come lati il diametro AB, il diametro

$A'B'$ parallelo ad AB ed i segmenti congiungenti A con A' e B con B'. Questa spira è interessata dal flusso φ prodotto dalla corrente variabile alternata i che percorre il conduttore di sinistra. La variazione del flusso φ determina nella spira $AA'BB'$ una f.e.m. indotta e che nel primo quarto di periodo, se riferita al tratto AA', risulta negativa. L'attuale situazione può ancora essere rappresentata dalla fig. 9.2, da cui si deduce che complessivamente nel conduttore di destra di fig. 10.1 la corrente si addensa dalla parte del lato BB'. Poiché lo stesso ri sultato si sarebbe ottenuto considerando l'effetto del flusso φ prodotto dalla corrente i del conduttore di destra sul conduttore di sinistra, si può concludere che in due conduttori affiancati percorsi da corrente nello stesso verso l'intensità è maggiore sulle superfici più lontane dei conduttori. Viceversa si potrebbe facilmente verificare che l'intensità risulta maggiore verso le superfici più vicine se i conduttori sono percorsi da correnti di verso contrario. Per l'effetto di vicinanza la riduzione della superficie utile dei conduttori è tanto più grande quanto maggiore è il diametro dei conduttori e quanto minore è la loro distanza.

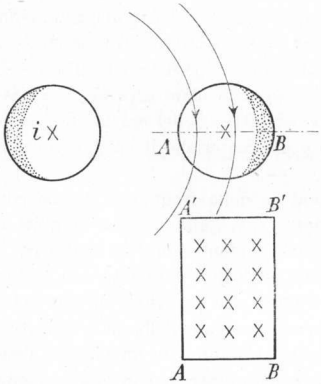


Fig. 10.1 – Effetto di vicinanza.

L'effetto di vicinanza si verifica in particolare nei conduttori avvolti su un supporto. Nel caso più semplice di un avvolgimento cilindrico ad un solo strato (fig. 10.2) il rapporto R'_f/R_0 tra il valore della resistenza R'_f (che tiene conto sia dell'effetto pellicolare che dell'effetto di vicinanza) e la resistenza in corrente continua R_0 può essere valutato con la relazione:

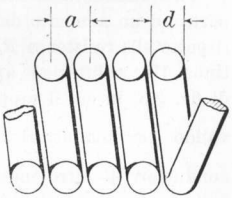


Fig. 10.2 – Avvolgimento nel quale si verifica l'effetto di vicinanza.

$$\frac{R'_f}{R_0} = 1 + q\sqrt{1 - \frac{R_0}{R_f}} \tag{10.1}$$

nella quale R_0/R_f è il reciproco del rapporto R_f/R_0 ricavabile dal grafico di fig. 9.3 (tiene conto unicamente dell'effetto pellicolare), mentre q è un coefficiente che, in funzione del rapporto a/d (fig. 10.2), si può dedurre dal grafico di fig. 10.3.

Vi sono diversi altri motivi per cui la resistenza subisce un aumento passando dalla corrente continua alla corrente alternata.

Anzitutto il flusso variabile prodotto dalla corrente alternata concatenandosi con i materiali conduttori di ogni genere presenti nelle vicinanze determina in essi delle correnti indotte che per effetto Joule sono causa di dissipazione di potenza. Se i predetti materiali oltreché essere conduttori sono di natura ferro-

magnetica in essi si verificano perdite di potenza anche a causa dei cicli di isteresi magnetica cui vengono assoggettati.

Allo stesso modo le variazioni alternative di tensione che si verificano tra due punti di un conduttore, risolvendosi in variazioni alternative dell'intensità

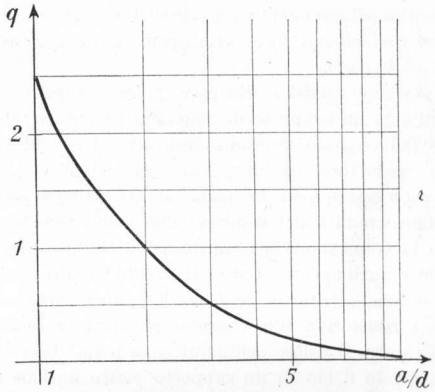


Fig. 10.3 – Variazione del coefficiente q che interviene nella formula 10.1.

del campo elettrico nelle vicinanze del conduttore, determinano nei materiali dielettrici interessati dei cicli di isteresi dielettrica e quindi ulteriore perdita di potenza.

Poiché risulta piuttosto complessa la valutazione di ognuna di queste singole cause di dissipazione di potenza, se ne fa una valutazione complessiva mediante la relazione 8.3 nella quale la potenza P è quella fornita dal generatore alla resistenza R entro cui passa l'intensità di corrente di valore efficace I; la potenza P viene dissipata nella resistenza per tutte le cause sopra menzionate.

11. – *Resistori usati nei circuiti elettronici.*

Un *resistore* è un elemento di circuito che ha lo scopo di fornire con un piccolo ingombro un valore piuttosto elevato di resistenza. Un resistore reale presenta oltre una resistenza R, una induttanza parassita L ed una capacità parassita C, per cui lo schema equivalente può essere ricondotto a quello di figura 11.1. Il comportamento del resistore reale si approssima sufficientemente a quello di una resistenza ideale R se sono verificate contemporaneamente le seguenti disuguaglianze: $\omega L \ll R$

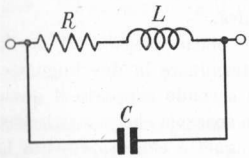


Fig. 11.1 – Circuito equivalente di un resistore.

ed $\frac{1}{\omega C} \gg R$. Ciò può avvenire per un vasto campo di frequenze se sono molto bassi i valori L e C. In caso contrario il comportamento ideale si ha solo alle frequenze più basse, mentre alle frequenze elevate è necessario mettere in conto i parametri parassiti.

I resistori usati ordinariamente nei circuiti elettronici possono essere di *tipo fisso* o di *tipo variabile*. A loro volta i resistori di tipo fisso possono essere *a filo*, *chimici* o *ad impasto*.

I *resistori a filo* sono adatti a dissipare potenze superiori ad alcuni watt. Essi sono costituiti da un supporto di materiale isolante e resistente alle temperature elevate (ad esempio, ceramica, mica, ecc.) su cui viene avvolto un filo di materiale conduttore. La lunghezza e la sezione del filo, la resistività del materiale devono essere scelti in modo tale da ottenere il desiderato valore di resistenza. Alle estremità del supporto due anelli fermano i terminali del filo permettendo la connessione del resistore nel circuito mediante saldatura. Il filo viene protetto dagli agenti esterni e dai corto circuiti tra le spire mediante una opportuna vernice vetrificata ad elevata temperatura.

Alcune volte i resistori a filo vengono costruiti in modo anti-induttivo con criteri atti a ridurre il valore dell'induttanza parassita. Ciò si può ottenere ad esempio avvolgendo il filo su un supporto piatto anziché cilindrico: diminuisce così la superficie di ogni spira e quindi il flusso con essa concatenato. Meglio ancora se invece di un solo avvolgimento se ne usano due avvolti in senso contrario ed in parallelo tra di loro in modo che il flusso prodotto da un avvolgimento annulli quello prodotto dall'altro.

I resistori *chimici*, adatti per piccole intensità di corrente, sono costituiti da un supporto isolante cilindrico, ad esempio in porcellana, sul quale è stato depositato uno strato di grafite. Le dimensioni del supporto, lo spessore dello strato conduttore e la sua eventuale spiralizzazione determinano il valore della resistenza.

I resistori *ad impasto* sono costituiti da un supporto di materiale isolante forato internamente ed entro il quale viene introdotta della polvere di carbone ed ossidi metallici mescolata con sostanze agglomeranti. Sia i resistori chimici che quelli ad impasto sono completati dai terminali per l'opportuna inserzione nei circuiti e da un rivestimento protettivo su cui viene indicato il valore di resistenza. Nella tabella a pagina seguente è riportato il *codice dei colori* usato ormai quasi universalmente per indicare il valore di un resistore.

I resistori di tipo variabile sono i *potenziometri* ed i *reostati*. In essi la variazione di resistenza può essere lineare o logaritmica.

I *potenziometri a filo* hanno un supporto isolante piatto piegato ad anello sul quale è avvolto il conduttore che viene fatto terminare in due linguette. Il supporto ad anello viene quindi montato su un secondo supporto il quale risulta provvisto di un perno solidale ad un cursore o spazzola che può strisciare sul conduttore. Anche il cursore fa capo ad una linguetta che rappresenta la presa centrale del potenziometro.

I *potenziometri chimici* differiscono da quelli a filo perché la parte resistiva

anziché essere costituita da filo è ottenuta mediante deposito di uno strato chimico su un supporto isolante a corona circolare su cui può strisciare la spazzola costituente il cursore collegata al terminale centrale. Se lo strato conduttore è di grafite il contatto tra questo ed il cursore non avviene direttamente ma per mezzo di una lamina metallica interposta che evita il logorio dello strato di grafite. Questi potenziometri servono per potenze inferiore e più elevati valori di resistenza dei potenziometri a filo.

Codice dei colori per i resistori

Colore A	Prima cifra	Colore B	Seconda cifra	Colore C	Zeri	Colore D	Tolleranza
Nero	0	Nero	0	Nero	nessuno	nessuno	± 20%
Marrone	1	Marrone	1	Marrone	0	Argento	± 10%
Rosso	2	Rosso	2	Rosso	00	Oro	± 5%
Arancio	3	Arancio	3	Arancio	000		
Giallo	4	Giallo	4	Giallo	0000		
Verde	5	Verde	5	Verde	00000		
Blu	6	Blu	6	Blu	000000		
Viola	7	Viola	7				
Grigio	8	Grigio	8				
Bianco	9	Bianco	9				

Il reostato differisce dal potenziometro per avere solo due terminali anziché tre. In esso è presente il terminale del cursore e solo un estremo del conduttore. Ovviamente un potenziometro può anche essere usato come reostato.

Per quanto riguarda l'effetto pellicolare, e quindi le variazioni di resistenza con la frequenza, si comportano nel modo migliore i resistori a grafite. I più bassi valori di induttanza e capacità sono presentati dai resistori ad impasto. I resistori a filo presentano un elevato valore di induttanza se realizzati nel modo più semplice; se invece sono realizzati nel tipo antiinduttivo possono presentare un elevato valore di capacità.

12. *Induttanze.*

Ogni circuito percorso da una certa intensità di corrente elettrica viene a concatenarsi con un flusso magnetico di cui l'intensità di corrente è la causa. Si dice allora che il circuito possiede una certa induttanza il cui valore numerico è dato dal rapporto tra il flusso Φ prodotto e l'intensità di corrente I che lo produce. È quindi:

12.1 $$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Dalla relazione precedente si ricava:

12.2 $$\Phi = LI$$

e quindi l'induttanza rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra il flusso

e l'intensità di corrente. Se la corrente è variabile sarà in ogni istante verificata la relazione:

12.3 $$\varphi = Li$$

in cui φ e i rappresentano i valori istantanei del flusso e della intensità di corrente.

Fig. 12.1 – Spira circolare.

Prende il nome di *induttore* un elemento di circuito atto a determinare in uno spazio ridotto un valore relativamente grande di induttanza. L'induttore più semplice può essere quello costituito da una *spira circolare* (fig. 12.1). Se la spira è percorsa da una corrente variabile di valore istantaneo i essa è interessata da un flusso dato dalla 12.3 e, per il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, diviene sede di una f.e.m. indotta di valore istantaneo:

12.4 $$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

od anche, applicando la 12.3:

12.5 $$e = -L\frac{di}{dt}$$

dove il segno meno sta ad indicare che la f.e.m. di autoinduzione (caso particolare dell'induzione elettromagnetica) è di segno tale da opporsi alla variazione dell'intensità di corrente (legge di Lenz).

Un altro tipo di induttore è quello che si ottiene collegando in serie tra loro diverse spire affiancate aventi lo stesso asse e lo stesso diametro: si ottiene un *solenoide rettilineo* (fig. 12.2). Se l'asse attorno a cui sono avvolte le spire affiancate è circolare si ha un *solenoide toroidale* (fig. 12.3).

Se il solenoide di N spire è percorso da una intensità di corrente i variabile, ogni sua spira diviene sede di una f.e.m., e poiché le varie

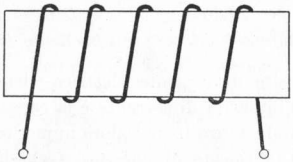


Fig. 12.2 – Solenoide rettilineo.

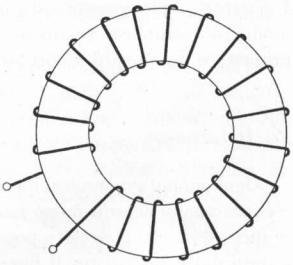


Fig. 12.3 – Solenoide toroidale.

spire sono in serie la f.e.m. risultante presente tra gli estremi del solenoide si otterrà addizionando tra loro le N f.e.m. Si ha quindi:

12.6 $$e = -N\frac{d\varphi}{dt}\ (^1)\ .$$

(1) Conviene subito porre in evidenza che mentre nella 12.4 φ rappresenta il flusso

La 12.6, essendo N una costante, si può anche scrivere:

12.7 $$e = -\frac{d(N\varphi)}{dt}\,.$$

Dalla 12.7 si deduce che la f.e.m. indotta in un solenoide dipende dal prodotto del numero delle spire del solenoide N per il flusso φ prodotto dal solenoide. A questo prodotto si dà il nome di *flusso concatenato* con il solenoide, φ_c . È quindi:

12.8 $$\varphi_c = N\varphi$$

per cui la 12.7 si può scrivere:

12.9 $$e = -\frac{d\varphi_c}{dt}\,.$$

La 12.9 è formalmente identica alla 12.4. Affinché anche in questo caso sia applicabile la 12.5, bisogna porre:

12.10 $$\varphi_c = Li\,.$$

Se l'intensità di corrente è costante, la 12.10 diviene:

12.11 $$\Phi_c = LI$$

da cui:

12.12 $$L = \frac{\Phi_c}{I}\,.$$

La 12.12 è una espressione più generale della 12.1 alla quale si riconduce ponendo $N = 1$. Si può quindi definire l'induttanza L di un induttore come il rapporto tra il flusso concatenato con l'induttore e l'intensità di corrente che di questo flusso concatenato è causa.

Il valore numerico dell'induttanza può anche essere dedotto dalla 12.5. Infatti L risulta numericamente uguale ad e se di/dt è uguale ad uno. Il valore dell'induttanza di un induttore corrisponde quindi al valore della f.e.m. in esso indotta quando la corrente che lo percorre varia di $1A$ al sec. (o di $1mA$ al msec, ecc.).

---

prodotto da una sola spira, nella 12.6 φ rappresenta il flusso prodotto da tutte le spire del solenoide (per lo meno ammettendo nulla la dispersione di flusso). In linea teorica quindi la 12.6 dà un valore di e che è N^2 volte più grande di quello dato dalla 12.4.

13. – *Circuito equivalente di un induttore. Fattore di merito.*

Il circuito equivalente di un induttore reale è quello rappresentato in fig. 13.1, in cui L è il valore di induttanza proprio dell'induttore, R è una resistenza che tiene conto di tutte le cause di perdita di potenza nell'induttore: perdite ohmiche nel conduttore di cui è formato l'avvolgimento, perdite magnetiche per correnti parassite e per isteresi nei materiali conduttori e ferromagnetici interessati dal flusso variabile dell'induttore, perdite dielettriche nel supporto isolante e nel rivestimento isolante del conduttore. Infine C tiene conto della capacità distribuita tra spira e spira, e tra le spire ed i materiali circostanti.

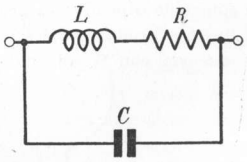


Fig. 13.1 – Circuito equivalente di un induttore.

Trascurando le perdite e quindi R, l'induttore presenta tra gli estremi una reattanza:

$$\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

corrispondente ad una induttanza equivalente:

13.1 $$L_{eq} = \frac{L}{1 - \omega^2 LC} \, .$$

Per frequenze sufficientemente più piccole di quella corrispondente ad

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

l'induttore si comporta come una induttanza il cui valore aumenta con ω, mentre per frequenze maggiori di quella corrispondente ad ω_0 l'induttore si comporta come una capacità.

Se l'induttore è destinato a lavorare a frequenze molto più piccole di quella corrispondente ad ω_0, il circuito equivalente può ridursi a quello di fig. 13.2. L'induttore è tanto più perfetto quanto minore è la sua resistenza R nei confronti della sua reattanza ωL. Si assume come indice di bontà di un induttore il cosiddetto *fattore di merito* Q, che può essere facilmente definito con le seguenti considerazioni.

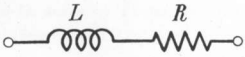


Fig. 13.2 – Circuito equivalente di un induttore a frequenze non molto elevate.

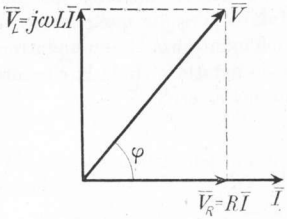


Fig. 13.3 – Diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano un induttore.

Sia $\overline{V}$ la tensione applicata ai capi dell'induttore. Essa determina nell'induttore il passaggio di una corrente di intensità $\overline{I}$. In fig. 13.3 è stato eseguito il diagramma vettoriale delle grandezze che interessano l'induttore, avendo assunto come vettore di riferimento l'intensità $\overline{I}$. Questa intensità produce una caduta di tensione nella parte resistiva R dell'induttore (solo idealmente separabile dalla parte reattiva). Tale caduta è data in valore assoluto e fase da $\overline{V}_R = R\overline{I}$. D'altra parte l'intensità di corrente produce pure nella parte induttiva L una caduta di tensione, dàta in valore assoluto e fase da $\overline{V}_L = j\omega L\overline{I}$. La tensione risultante $\overline{V}$ si ottiene componendo vettorialmente la $\overline{V}_R$ con la $\overline{V}_L$. Ne deriva che la tensione $\overline{V}$ risulta sfasata in anticipo di un angolo φ rispetto all'intensità di corrente $\overline{I}$. Si dice fattore di merito Q dell'induttore la tangente trigonometrica dell'angolo φ:

13.2 $$Q = \operatorname{tg} \varphi \, .$$

Evidentemente l'angolo φ varia da 90° per un induttore ideale privo di perdite a valori piccolissimi per gli induttori con perdite rilevanti. Di conseguenza il fattore di merito ha valore infinito per induttori ideali e valori via via più piccoli per induttori di caratteristiche più scadenti. Il fattore di merito si può far dipendere dai parametri dell'induttore osservando che è:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L I}{R I} = \frac{\omega L}{R} \, ,$$

e quindi:

13.3 $$Q = \frac{\omega L}{R} \, .$$

Molte volte riesce comodo rappresentare le perdite dell'induttore con una resistenza R_p in parallelo anziché in serie all'induttanza. Per far ciò conviene trasformare il circuito equivalente serie di fig. 13.2 nel circuito equivalente parallelo di fig. 13.4, imponendo la condizione dell'uguaglianza dell'ammettenza per entrambi i circuiti. Bisogna quindi scrivere:

$$\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R + j\omega L}$$

da cui razionalizzando si ricava:

$$\frac{1}{R_p} - j\,\frac{1}{\omega L_p} = \frac{R}{R_2 + \omega^2 L^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

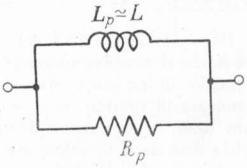


Fig. 13.4 - Circuito equivalente parallelo di un induttore.

ed uguagliando tra loro i coefficienti delle parti immaginarie e le parti reali:

13.4 $$\frac{1}{\omega L_p} = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Ritenendo ora $R \ll \omega L$ ed a maggior ragione $R^2 \ll \omega^2 L^2$ (il che è verificato ordinariamente nei circuiti elettronici), dalla prima delle 13.4 si può ricavare $L_p = L$, mentre dalla seconda risulta:

$$R_p = \frac{\omega^2 L^2}{R} = \omega L Q$$

e quindi:

13.5 $$Q = \frac{R_p}{\omega L} \text{ (1)}.$$

Ordinariamente i fattori di merito degli induttori assumono valori dell'ordine delle decine fino ad alcune centinaia.

Sia dalla 13.3 che dalla 13.5 risulta che il fattore di merito è variabile con la frequenza; ciò non solo perchè con la frequenza varia la reattanza dell'induttore, ma anche perché con la frequenza varia la resistenza che rappresenta le perdite (R aumenta, mentre R_p diminuisce). Come conseguenza si ha per ogni induttore una frequenza (che dovrebbe essere quella di normale impiego) alla quale il fattore di merito diviene massimo e nel cui intorno si mantiene approssimativamente costante (figura 13.6).

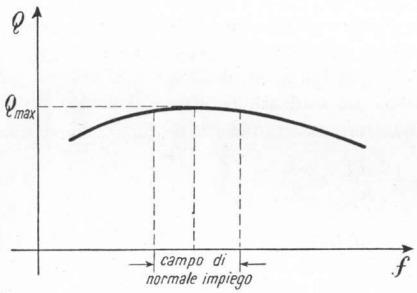


Fig. 13.6 – Variazione del fattore di merito di un induttore.

---

(1) L'espressione 13.5 del fattore di merito dell'induttore in funzione della R_p si può anche ricavare considerando il diagramma vettoriale relativo al circuito equivalente parallelo di fig. 13.4. Assumendo come grandezza di riferimento la tensione $\overline{V}$ (figura 13.5), le correnti nei due rami in parallelo sono date, in valore assoluto e fase, da:

$$\overline{I}_R = \overline{V}/R_p$$

$$\overline{I}_L = -j\overline{V}/\omega L$$

mentre la corrente risultante $\overline{I}$ è la somma vettoriale delle $\overline{I}_R$ e $\overline{I}_L$. Ponendo ancora $Q = \text{tg}\,\varphi$, dalla fig. 13.5 si ricava:

$$Q = \text{tg}\,\varphi = \frac{V/\omega L}{V/R_p} = R_p/\omega L\,.$$

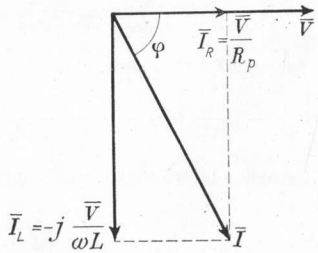


Fig. 13.5 – Diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano il circuito equivalente parallelo di un induttore.

$\frac{V}{\omega L} \cdot \frac{R_p}{V}$ $\frac{R_p}{\omega L}$

14. – *Induttanza di un solenoide. Permeabilità incrementale.*

Vi sono diversi tipi di induttori, secondo che l'avvolgimento vien fatto su materiale non ferromagnetico o ferromagnetico; secondo che l'avvolgimento è ad uno solo o a più strati sovrapposti, secondo la successione e la reciproca posizione delle diverse spire, ecc. Le regole per il calcolo delle induttaze dei vari induttori sono quindi molto varie e numerose, di natura semiempirica ed in ogni caso sempre da verificarsi con adatte misure. Qui ci si limita a considerare l'espressione relativa al calcolo del più semplice tipo di induttore a più spire, che è il solenoide ad un solo strato di spire.

Se tutto il flusso magnetico si concatena con tutte le spire del solenoide (e ciò si verifica con buona approssimazione se il solenoide è toroidale e le spire sono avvolte uniformemente in modo serrato, mentre si verifica meno per solenoidi rettilinei e tanto meno quanto maggiore è il rapporto diametro-lunghezza del solenoide) si può scrivere:

14.1 $$L = \frac{\Phi_c}{I} = N\frac{\Phi}{I} = N\frac{BS}{I}$$

dove con B si indica l'induzione magnetica e con S la sezione del solenoide corrispondente al diametro D (fig. 14.1). Ma è:

$$B = \mu H = \mu\frac{NI}{l}\ ,$$

avendo indicato con μ la permeabilità magnetica del materiale di cui è costituito il supporto e con l la lunghezza del solenoide. Sostituendo l'ultima espressione di B nella 14.1 si ottiene:

14.2 $$L = N\frac{\mu\frac{NI}{l}S}{I} = \mu\frac{N^2}{l}S\ .$$

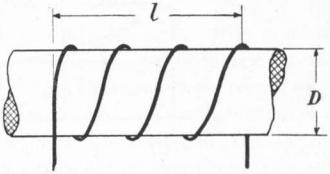


Fig. 14.1 – Solenoide.

Esprimendo ora la sezione S in funzione del diametro, ossia $S = 0{,}785D^2$, e la permeabilità in funzione della permeabilità relativa

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = 1{,}256\ 10^{-6}\mu_r$$

si ricava:

$$L = 1{,}256 \times 0{,}785 \times 10^{-6}\mu_r\frac{N^2D^2}{l}\ (H)\ .$$

Raccogliendo le costanti e moltiplicando per 10^6 onde ottenere l'induttanza direttamente in μH, si ha infine:

14.3 $$L = 0{,}987\frac{N^2D^2}{l}\mu_r(\mu H)\ .$$

Nella formula precedente D ed l devono essere espressi in metri. Nel caso in cui vi sia del flusso non concatenantesi con tutte le spire, la 14.2 sarà ancora valida a patto di ridurre il coefficiente numerico 0,987. In pratica questo coef-

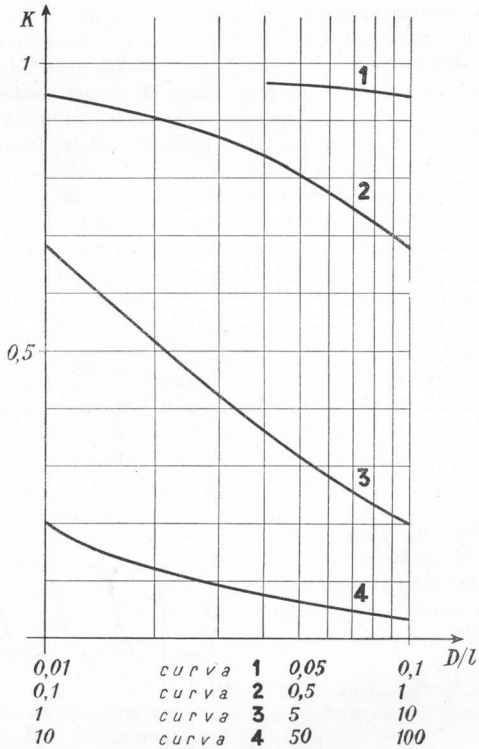


Fig. 14.2 – Variazione del coefficiente k della formula 14.4.

ficiente dovrà essere diminuito man mano che aumenta il rapporto D/l. L'espressione più generale per il calcolo dell'induttanza dei solenoidi rettilinei ad un solo strato sarà quindi la seguente:

14.4 $$L = k \frac{N^2 D^2}{l} \mu_r \, .$$

Il grafico di fig. 14.2 indica come varia il coefficiente k in funzione del rapporto D/l.

Per quanto riguarda la permeabilità relativa μ_r che compare nelle formule

precedenti essa risulta uguale ad uno se il supporto è di materiale non ferromagnetico, deve invece essere valutata caso per caso se il supporto è di materiale ferromagnetico. E ciò non soltanto in relazione al diverso materiale di volta in volta impiegato, ma anche in relazione alle diverse condizioni di funzionamento del materiale stesso. Infatti per un materiale ferromagnetico la permeabilità $\mu = B/H$ è variabile secondo la curva di magnetizzazione (fig. 14.3); ma ciò che rende più difficile la valutazione della permeabilità da introdurre nella 14.4 è che il materiale ferromagnetico segue un ciclo d'isteresi quando la

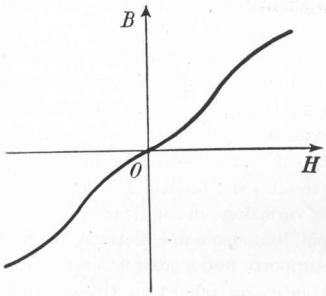


Fig. 14.3 – Curva di magnetizzazione.

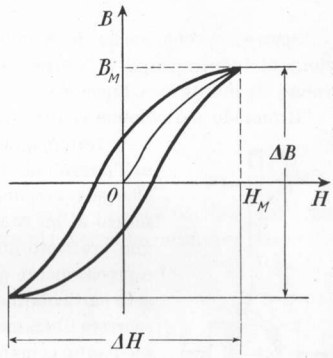


Fig. 14.4 – Ciclo d'isteresi simmetrico.

corrente che percorre l'avvolgimento è variabile periodicamente. Il ciclo d'isteresi risulta simmetrico se l'avvolgimento è percorso soltanto da corrente alternata (fig. 14.4); esso invece risulta asimmetrico (fig. 14.5) se l'avvolgimento oltre essere percorso da corrente alternata è contemporaneamente interessato da una corrente continua che ne stabilisce il punto di funzionamento. In entrambi questi ultimi casi il valore di permeabilità da introdurre nella 14.4 è quello della cosiddetta permeabilità incrementale μ_Δ che si calcola eseguendo il rapporto tra la variazione di induzione ΔB e la variazione di intensità di campo magnetico ΔH cui è soggetto il materiale durante il funzionamento. Quindi $\mu_\Delta = \Delta B/\Delta H$. È evidente che nella 14.4 al posto della μ_r bisognerà sostituire il rapporto tra la permeabilità incrementale precedentemente ricavata μ_Δ e la permeabilità dell'aria μ_0.

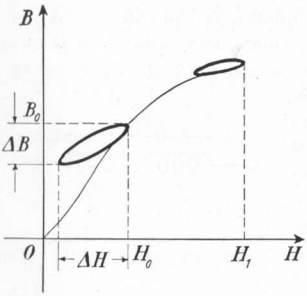


Fig. 14.5 – Cicli di isteresi asimmetrici.

Un'altra osservazione sorge spontanea osservando ancora la fig. 14.5 relativamente al punto di funzionamento cui corrisponde l'intensità di campo H_1.

Si vede come in questo caso, lavorando il materiale ferromagnetico in saturazione, pressoché nulla risulta la permeabilità incrementale e di conseguenza l'induttanza L. Questo inconveniente si può più facilmente verificare per gli induttori usati in bassa frequenza: per essi si vedrà successivamente come si possa rimediare.

15. – *Induttori variabili.*

Spesso servono anche degli induttori con induttanza variabile. La variazione di induttanza si può ottenere agendo su una delle grandezze da cui il valore di induttanza dipende.

Il metodo più comune consiste nell'usare come nucleo un cilindro di materiale ferromagnetico filettato in modo da potersi avvitare nell'interno del supporto (fig. 15.1). Lo spostamento del nucleo (e conseguente variazione di induttanza) può farsi per mezzo di un cacciavite la cui punta trova sede in un intaglio praticato ad una estremità del nucleo. In alcuni casi, e precisamente quando la variazione di induttanza deve essere particolarmente ampia, il nucleo non è filettato, ma può scorrere liberamente nel supporto fino a completa estrazione mediante comando effettuato con opportuni tiranti collegati ad una manopola.

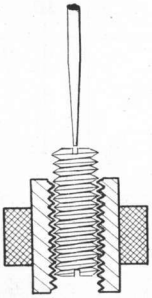


Fig. 15.1 – Induttore variabile.

Un altro tipo di induttore variabile è costituito dal cosiddetto *variometro*. In realtà in questo caso si tratta di due induttori collegati in serie tra loro. I due induttori posti in vicinanza si influenzano reciprocamente per il fenomeno della mutua induzione. L'induttanza equivalente che l'insieme presenta tra i morsetti estremi, oltre dipendere dalle induttanze proprie dei due induttori, dipende pure dalla loro mutua induzione; poiché questa è variabile in funzione della posizione reciproca dei due induttori, lo spostamento di uno dei due potrà far variare l'induttanza tra i morsetti estremi da un minimo ad un massimo. Siano infatti dati due induttori in serie (fig. 15.2) interessati dalla corrente variabile di valore istantaneo i. Siano L_1 ed L_2 le due induttanze ed M il coefficiente di mutua induzione [1]. Nel primo

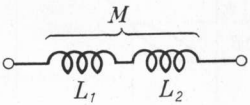


Fig. 15.2 – Induttori in serie con mutua induzione.

---

[1] Si ricordi che il coefficiente di mutua induzione M tra due induttori 1 e 2 è il rapporto tra il flusso Φ_{c1} concatenato con l'induttore 1 e l'intensità di corrente I_2 che, percorrendo l'induttore 2, lo produce:

$$M = \frac{\Phi_{c1}}{I_2} .$$

induttore si origina oltre la f.e.m. di autoinduzione dovuta alla L_1 anche la f.e.m. di mutua induzione dovuta alla M e causata dalla corrente i che percorre la L_2. Tra gli estremi della L_1 nasce quindi una f.e.m. complessiva:

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \text{ (1)} .$$

Analogamente tra gli estremi della L_2 si ha:

$$e_2 = -L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \text{ (1)} .$$

La f.e.m. totale ai capi della serie sarà:

$$e = e_1 + e_2 = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

e raccogliendo $\frac{di}{dt}$:

15.1 $$e = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} .$$

Dalla 15.1 si rileva che la f.e.m. complessivamente indotta nei due induttori in serie mutuamente influenzantisi è la stessa che verrebbe indotta in un unico induttore di induttanza equivalente:

15.2 $$L = L_1 + L_2 + 2M \text{ (2)} .$$

Risulta anche

$$M = \frac{\Phi_{c2}}{I_1}$$

in cui i simboli usati sono di ovvia interpretazione.

(1) Nei due termini compare la derivata della stessa intensità di corrente i essendo le due bobine in serie.

(2) Bisogna subito mettere in evidenza che non sempre la serie di due induttanze dà una induttanza equivalente superiore alla somma delle due. Ciò si verifica soltanto quando il coefficiente di mutua induzione M che compare nella 15.2 è positivo, cioè

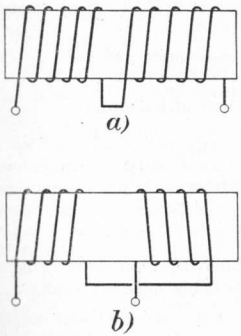


Fig. 15.3 – Induttori che generano flussi concordi.

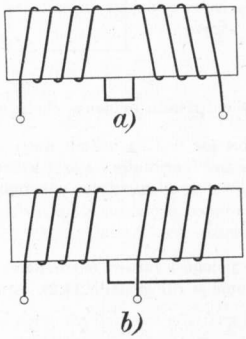


Fig. 15.4 – Induttori che generano flussi discordi.

Il coefficiente di mutua induzione M può esprimersi in funzione delle due induttanze L_1 ed L_2 e del cosiddetto fattore di accoppiamento k, mediante la:

15.3 $$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$ (1) .

Le induttanze variabili di tipo variometro vengono in pratica realizzate (fig. 15.5) mediante due avvolgimenti uno esterno all'altro, di cui uno fisso e l'altro invece dotato di possibilità di moto rotatorio in modo da variare il fattore di accoppiamento k teoricamente tra $+1$ e -1, praticamente invece tra valori $+k_{max}$ e $-k_{max}$ ancora di segno contrario ma inferiori all'unità. L'induttanza del variometro sarà quindi variabile tra un massimo:

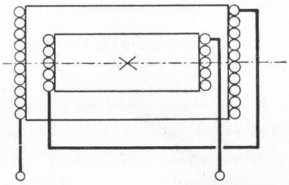


Fig. 15.5 – Variometro.

$$L_M = L_1 + L_2 + 2k_{max}\sqrt{L_1 L_2}$$

ed un minimo:

$$L_{min} = L_1 + L_2 - 2k_{max}\sqrt{L_1 L_2} .$$

---

quando i flussi prodotti dai due avvolgimenti sono concordi tra loro (come si verifica ad esempio negli schemi di fig. 15.3, *a* e *b*). Quando invece il coefficiente M è negativo, ossia i due flussi sono discordi (come in fig. 15.4, *a* e *b*), l'induttanza equivalente risulta minore della somma delle due singole induttanze.

(1) Si supponga infatti che il flusso variabile φ prodotto dall'avvolgimento 1 si concateni con l'avvolgimento 2; in quest'ultimo avremo una f.e.m. indotta di valore:

$$e_2 = -\frac{d\varphi_c}{dt} = -N_2\frac{d\varphi}{dt} = -N_2\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{N_1 i_1}{l}S\right)$$

avendo indicato con N_1, N_2, l, S, i_1 rispettivamente il numero di spire dell'avvolgimento 1 e dell'avvolgimento 2, la lunghezza complessiva del circuito magnetico, la sezione del circuito magnetico e la corrente variabile che percorrendo l'avvolgimento 1 induce la e_2 nell'avvolgimento 2.

Nella relazione precedente, portando fuori dal segno di derivata i fattori costanti, si ottiene:

$$e_2 = -\mu\frac{N_1 N_2}{l}S\frac{di}{dt}$$

da cui risulta evidente che il coefficiente di mutua induzione M è dato da:

15.4 $$M = \mu\frac{N_1 N_2}{l}S .$$

Elevando al quadrato entrambi i membri della 15.4 si ottiene:

$$M^2 = \left(\mu\frac{N_1^2}{l}S\right)\left(\mu\frac{N_2^2}{l}S\right)$$

e, poiché i fattori entro parentesi al secondo membro sono rispettivamente L_1 ed L_2 (come si rileva dalla 14.2), estraendo in ambi i membri la radice quadrata risulta:

15.5 $$M = \sqrt{L_1 L_2} .$$

La 15.5 è stata ricavata sotto l'ipotesi dell'assenza di flussi dispersi. Allorché invece questi ultimi esistano (caso pratico) il coefficiente di mutua induzione risulterà inferiore a quello

16. – *Induttori usati nei circuiti elettronici.*

Gli induttori possono anzitutto distinguersi in induttori senza nucleo di materiale ferromagnetico ed in induttori con nucleo di materiale ferromagnetico.

Gli induttori senza nucleo di materiale ferromagnetico vengono generalmente usati per alte frequenze. In essi si cerca di ridurre al minimo le perdite in vari modi. Si usano conduttori a bassa resistenza e per frequenze non eccessivamente elevate i conduttori multipli (*filo Litz*). Questi sono costituiti da più fili (anche fino a 100), separatamente isolati con smalto e cordati in modo che lungo lo sviluppo del conduttore ciascuno di essi occupi tutte le possibili posizioni dalle più interne alle più esterne. I fili vengono poi saldati tra loro alle estremità in modo da risultare tutti in parallelo. Poiché tutti i fili vengono a trovarsi nelle medesime condizioni la corrente si ripartisce tra essi uniformemente; inoltre in ciascuno di essi, a causa del piccolissimo diametro, l'effetto pellicolare risulta assai limitato e praticamente trascurabile. Questi conduttori multipli non trovano conveniente applicazione per frequenze superiori a qualche MHz in quanto alle elevate frequenze diventano notevoli le perdite dovute ad imperfetta cordatura e quelle che si hanno nel materiale d'isolamento tra i vari conduttori.

Per i supporti ed i rivestimenti si usano isolanti a piccola costante dielettrica

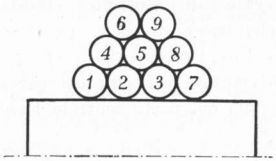


Fig. 16.1 – Disposizione dei conduttori di un avvolgimento adatta a ridurre le capacità distribuite.

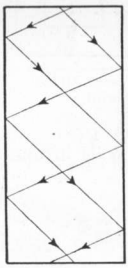


Fig. 16.2 – Avvolgimento a nido d'ape.

---

fornito dalla 15.5. Per ottenerne il valore effettivo occorrerà moltiplicare il secondo membro della 15.5 per un coefficiente di riduzione k, minore di 1, che è appunto il fattore di accoppiamento, il cui valore dipende dall'entità del flusso che, prodotto da un avvolgimento, si concatena anche con l'altro e quindi, in definitiva, dalla posizione reciproca dei due avvolgimenti. Si ottiene quindi la 15.3 in cui è $0 \leq k \leq 1$. Dalla 15.3 si ottiene:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

e si può quindi dire che il fattore di accopiamento k è il rapporto tra il valore effettivo M del coefficiente di mutua induzione ed il valore ideale che il coefficiente di mutua induzione avrebbe qualora tutto il flusso prodotto da un avvolgimento si concatenasse con l'altro avvolgimento.

ed a basse perdite dielettriche, non igroscopici e difficilmente alterabili dagli agenti esterni. Occorre poi fare in modo da rendere piccola la capacità distribuita e ciò si ottiene in particolare ponendo a maggior distanza tra loro le spire tra le quali esiste la maggior d.d.p. Se, ad esempio, è necessario sovrapporre diversi strati di spire si provvederà a disporli come in fig. 16.1. Per bobine a molte spire si ottengono buoni risultati usando i cosiddetti avvolgimenti (*a nido d'ape*), nei quali vengono a trovarsi paralleli tra loro conduttori di spire successive a piccola d.d.p., mentre i conduttori a maggior d.d.p. appartenenti a strati adiacenti vengono ad incrociarsi (fig. 16.2).

Qualora si voglia aumentare, a parità di dimensioni, l'induttanza di un induttore si usano i nuclei di materiali ferromagnetico. Tipico è l'impiego di ferro o magnetite ridotti in piccolissimi granuli, che, isolati tra loro, vengono conglomerati mediante opportuni leganti. In questo modo le correnti parassite dovendo svolgersi in piccolissimo spazio trovano una resistenza abbastanza elevata. Un risultato nettamente migliore si ottiene con i nuclei di ferrite che uniscono ad una permeabilità elevata quanto quella del ferro una elevata resistività tale da rendere trascurabili anche a frequenze molto elevate le perdite per correnti parassite.

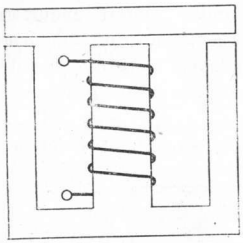


Fig. 16.3 – Forma tipica dei lamierini.

Oltre gli induttori fin qui brevemente esaminati e che servono per frequenze piuttosto elevate, vi sono gli induttori che devono servire per basse frequenze (acustiche e industriali) e devono presentare elevati valori di induttanza. Questi induttori hanno il nucleo composto da un pacco di lamierini di piccolo spessore, isolati tra loro sempre allo scopo di ridurre le perdite per correnti parassite. Una delle forme tipiche di questi lamierini (sulla cui parte centrale viene eseguito

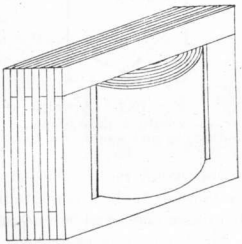


Fig. 16.4 – Disposizione dei lamierini adatta a ridurre i traferri.

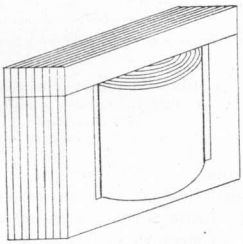


Fig. 16.5 – Disposizione dei lamierini adatta ad evitare la saturazione.

l'avvolgimento) è quella indicata in fig. 16.3. Sono composti di due parti, sagomate rispettivamente ad E e ad I. Qualora non vi sia pericolo di saturare il ferro i lamierini dei due tipi si dispongono alternati. Ciò consente di ridurre

il traferro e quindi di aumentare il flusso utile a parità di numero di spire (fig. 16.4). Se invece, a causa di una magnetizzazione costante dovuta ad una corrente continua percorrente l'avvolgimento, si corre rischio di portare il ferro in saturazione ed annullare in tal modo la permeabilità incrementale, i lamierini vengono disposti in modo che si sovrappongano quelli di ugual tipo. Vengono poi accostati tra loro i due pacchi dei due tipi diversi in modo da lasciare un opportuno traferro adatto ad evitare che il ferro lavori in saturazione (fig. 16.5).

17. – *Capacità.*

Un importante elemento di circuito è il *condensatore*, la cui più semplice costituzione è rappresentata da due piastre piane di materiale conduttore, affacciate parallelamente tra loro e separate da uno strato di materiale dielettrico o isolante che può anche essere aria (fig. 17.1). Se si applica una certa d.d.p. tra le piastre, dette più comunemente armature, si accumula su ciascuna di esse una certa quantità di elettricità o carica elettrica, uguale per entrambe ma di segno contrario, il cui valore è tanto maggiore quanto più estese sono le armature, quanto minore è la loro distanza e quanto più idoneo è il dielettrico interposto a favorire l'accumulo. Variando la d.d.p. tra le armature varia in proporzione la quantità di elettricità accumulata.

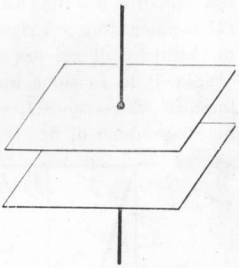


Fig. 17.1 – Condensatore ad armature piane e parallele.

Per quanto nei suoi diversi tipi il condensatore sia di costituzione alquanto più complessa di quella cui si è fatto cenno sopra, il suo scopo è sempre di accumulare o condensare sulle sue armature una certa quantità di elettricità direttamente proporzionale alla d.d.p. cui le armature vengono di volta in volta assoggettate. È sempre valida quindi la relazione:

17.1 $$Q = CV$$

dove con Q e V si indicano rispettivamente la quantità di elettricità presente su una armatura (quella sull'altra è uguale in valore assoluto e di segno contrario) e la d.d.p. applicata; con C invece si indica il coefficiente di proporzionalità tra Q e V, che prende il nome di capacità del condensatore.

Nel caso più semplice prima considerato di due armature piane e parallele separate tra loro da un dielettrico, il valore della capacità viene dato da:

17.2 $$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

in cui S è la superficie affacciata delle armature, d la loro distanza ed ε una caratteristica del dielettrico detta costante dielettrica. Per gli altri tipi di condensatori la 17.2 pur non essendo ordinariamente utilizzabile può tuttavia servire per un orientamento quantitativo.

18. – *Circuito equivalente di un condensatore. Angolo di perdita.*

Il circuito equivalente del condensatore reale può essere quello indicato in fig. 18.1, in cui alla capacità C del condensatore si è aggiunta in serie la resistenza R nella quale si vuole conglobare ogni causa di perdita. In effetti nel condensatore si hanno perdite per il passaggio della corrente nei terminali e nelle armature, perdite dielettriche nell'isolante interposto tra le armature e perdite ancora nell'isolante a causa del suo non perfetto potere isolante. Un'indicazione del comportamento del condensatore nei riguardi delle perdite viene fornita dal cosiddetto angolo di perdita δ di cui ora si vedrà il significato.

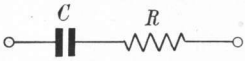


Fig. 18.1 – Circuito equivalente di un condensatore.

Sia $\overline{V}$ la tensione applicata al condensatore. Ad essa corrisponderà una intensità di corrente $\overline{I}$, che conviene assumere come grandezza di riferimento nel diagramma di fig. 18.2. L'intensità di corrente $\overline{I}$ provoca nella parte resistiva del condensatore una caduta $\overline{V}_R = R\overline{I}$ in fase con la $\overline{I}$, mentre nella parte capacitiva si ha una caduta $\overline{V}_c = -j\dfrac{1}{\omega C}\overline{I}$ in ritardo di 90° elettrici rispetto alla $\overline{I}$. La tensione risultante $\overline{V}$ è sfasata in ritardo rispetto alla corrente I di un angolo φ tanto più vicino ai 90° quanto minori sono le perdite del condensatore. L'angolo δ, complemento di φ a 90°, è quello che si dice *angolo di perdita* del condensatore ed aumenta con l'aumentare delle perdite. Poiché ordinariamente l'angolo δ è molto piccolo, il suo valore espresso in radianti coincide con il valore della sua tangente trigonometrica. Si può quindi scrivere:

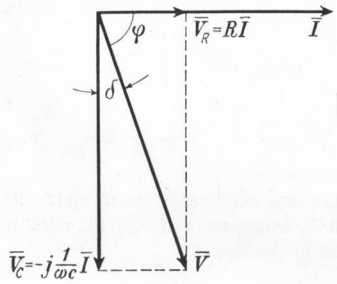


Fig. 18.2 – Diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano un condensatore.

$$\delta \simeq \operatorname{tg}\delta = \frac{V_R}{V_C} = \frac{RI}{\dfrac{I}{\omega C}}$$

e quindi:

18.1 $$\delta = \omega C R \,.$$

Il circuito equivalente del condensatore ad elementi in serie si può trasformare nel circuito equivalente ad elementi in parallelo, come indicato in fig. 18.3. Gli elementi parallelo devono essere tali che le ammettenze dei circuiti equivalenti di fig. 18.1 e di fig. 18.3 siano uguali. Imponendo allora questa uguaglianza:

$$\frac{1}{R_p} + j\omega C_p = \frac{1}{R - j\dfrac{1}{\omega C}}$$

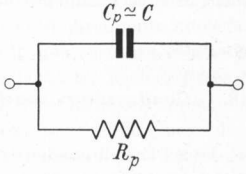


Fig. 18.3 – Circuito equivalente parallelo di un condensatore.

e razionalizzando si ottiene:

$$\frac{1}{R_p} + j\omega C_p = \frac{R}{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} + j\,\frac{\dfrac{1}{\omega C}}{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$

ed uguagliando tra loro i coefficienti delle parti immaginarie e le parti reali:

18.2
$$\omega C_p = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$
$$\frac{1}{R_p} = \frac{R}{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Poiché è sempre $R \ll 1/\omega C$ ed a maggior ragione $R^2 \ll 1/\omega^2 C^2$, dalla prima delle 18.2 si ricava $C_p = C$ mentre dalla seconda risulta:

$$R_p = \frac{1}{\omega^2 C^2 R} = \frac{1}{\omega C R \times \omega C} = \frac{1}{\delta \omega C}$$

e quindi:

18.3
$$\delta = \frac{1}{\omega C R_p} \text{ (1)} .$$

(1) L'espressione 18.3 dell'angolo di perdita del condensatore in funzione della R_p si può anche ricavare considerando il diagramma vettoriale relativo al circuito equivalente parallelo di fig. 18.3. Assumendo come grandezza di riferimento la tensione $\overline{V}$ (fig. 18.4), le correnti nei due rami in parallelo sono date, in valore assoluto e fase, da:

$$\overline{I}_R = \overline{V}/R_p$$
$$\overline{I}_C = j\overline{V}\omega C$$

mentre la corrente risultante è la somma vettoriale delle $\overline{I}_R$ e $\overline{I}_C$. Dalla fig. 18.4 si ricava:

$$\delta \simeq \operatorname{tg} \delta = \frac{V/R_p}{V\omega C} = \frac{1}{\omega C R_p}$$

coincidente con la 18.3.

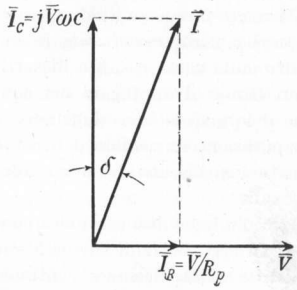


Fig. 18.4 – Diagramma vettoriale delle grandezze elettriche che interessano il circuito equivalente parallelo di un condensatore.

Il campo di variabilità dell'angolo di perdita δ è molto esteso, potendo assumere valori dell'ordine di 10^{-5} per buoni condensatori in aria fino a valori dell'ordine di 0,1 per condensatori elettrolitici alquanto scadenti. Sul valore dell'angolo di perdita influisce molto, oltre la qualità del dielettrico, lo stato di invecchiamento del condensatore.

NO

19. – *Condensatori usati nei circuiti elettronici.*

I vari tipi di condensatori si possono distinguere anzitutto secondo se sono *fissi*, *variabili* o *semifissi*.

I condensatori *fissi* sono quelli che presentano un unico valore di capacità prefissato all'atto della costruzione. Essi si distinguono tra loro per il materiale usato come dielettrico.

I condensatori *a mica* sono quelli che usano per dielettrico la mica: vengono costruiti per valori di capacità compresi tra 5 pF e 5.000 pF. Possono essere formati da diversi fogli metallici sottili alternati a fogli di mica, oppure da semplici fogli di mica sulle cui facce si effettua un deposito metallico.

I condensatori *ceramici* vengono costruiti per valori di capacità presso a poco uguali a quelli ottenuti con i condensatori a mica potendo giungere però fino ai 50.000 pF. Il dielettrico è costituito da materiale ceramico sotto forma di disco oppure di cilindro internamente cavo. Le due armature sono ottenute con vernice d'argento cosparsa sulle due facce del disco o sulla superficie interna e su quella esterna del cilindro.

Le capacità dei condensatori *a carta* sono comprese tra 1.000 pF e 1 μF. Essi sono composti di due strisce metalliche rettangolari con carta paraffinata interposta come dielettrico. Le strisce vengono avvolte a formare un cilindro che dopo la saldatura dei terminali viene posto in un adatto involucro protettivo. Spesso su questi condensatori esiste da un lato una indicazione quale ad esempio un cerchietto che sta ad indicare qual'è l'elettrodo esterno affinché esso possa essere collegato a massa, in modo da avere una azione schermante.

Ultimamente sono stati costruiti condensatori *a carta metallizzata* in cui le armature vengono ottenute mediante deposito sulla carta isolante di sottilissimi strati di alluminio. Questi condensatori hanno il vantaggio nei confronti dei condensatori a carta paraffinata che il loro dielettrico difficilmente viene perforato ed in caso di perforazione l'evaporazione immediata del sottile strato metallico evita il corto circuito tra le armature e consente al condensatore di rimanere efficiente.

Per ottenere elevati valori di capacità con piccolo ingombro servono i condensatori *elettrolitici*. Con essi si raggiungono i più alti valori di capacità che necessitano nei circuiti elettronici, dell'ordine delle unità, decine e centinaia di μF. Se si immergono due elettrodi di alluminio in una soluzione elettrolitica e si applica tra i due elettrodi una d.d.p. continua, sull'elettrodo positivo si forma una pellicola isolante di ossido di alluminio il cui spessore è dell'ordine

molecolare. Con questo principio sono formati i condensatori elettrolitici, nei quali l'ossido di alluminio è il dielettrico, una striscia di alluminio su cui si è avuta la formazione di ossido è un'armatura, mentre l'altra armatura è rappresentata dalla soluzione elettrolitica che è conduttrice; l'altra striscia di alluminio dà la possibilità di connessione dell'armatura negativa (elettrolita) al circuito esterno. In realtà i condensatori elettrolitici ordinariamente impiegati sono del tipo a secco, essendo l'elettrolita presente in una sostanza gelatinosa di cui è impregnata una striscia di carta o di garza posta tra le due strisce di alluminio. Le strisce sovrapposte vengono quindi arrotolate ed opportunamente protette come avviene per i condensatori a carta. Sull'involucro degli elettrolitici sono sempre segnate le polarità (più e meno) in quanto la loro connessione in circuito deve riprodurre quella che si è avuta all'atto della formazione dello strato di ossido. Questi condensatori servono unicamente quando sono interessati da tensione continua o pulsante od in ogni modo unidirezionale, ma non alternata: se usati in caso contrario si distruggerebbe il dielettrico ed il condensatore verrebbe posto fuori servizio. Occorre ancora notare che quanto maggiore è stata la tensione di formazione della pellicola di ossido, tanto maggiore è lo spessore della pellicola, quindi tanto maggiore la tensione di lavoro e tanto minore la capacità. Si possono perciò ottenere forti valori di capacità solo per basse tensioni di lavoro, a meno di aumentare notevolmente la superficie delle armature e quindi l'ingombro del condensatore.

Ultimamente sono venuti a concorrere con gli elettrolitici i condensatori *al tantalio*, di formazione analoga a quelli descritti precedentemente ma che usano elettrodi di tantalio anziché di alluminio e naturalmente come dielettrico ossido di tantalio. Questi condensatori presentano i vantaggi di ridottissime dimensioni, maggior durata nei confronti dei tipi tradizionali, perdite molto minori, attitudine a lavorare in pessime condizioni ambientali, maggior stabilità del valore di capacità. Ne limita attualmente la diffusione, dove le esigenze non sono severe, il costo di produzione molto più elevato dei condensatori elettrolitici ad elettrodi di alluminio.

Vasto impiego trovano i condensatori *variabili*, in cui la variazione di capacità viene ottenuta variando la superficie affacciata delle armature. Questi condensatori sono ordinariamente costituiti da una parte fissa, lo *statore*, formato da un insieme di lamine di alluminio parallele, di ugual forma, ugualmente spaziate e collegate in parallelo tra loro, e da una parte mobile, il *rotore*, formato da un insieme di lamine portate da un albero, anch'esse di ugual forma, ugualmente spaziate e collegate in parallelo tra loro. Le lamine del rotore e quelle dello statore sono intercalate tra loro. Lo spostamento delle lamine del rotore rispetto a quelle dello statore avviene per mezzo dell'albero di comando sopportato mediante cuscinetti a sfere da un supporto che viene fissato al telaio dell'apparecchio cui appartiene, mentre lo statore è isolato da quest'ultimo. La massima capacità del condensatore variabile, che corrisponde alla sua capacità nominale, si ha quando le lamine mobili sono completamente affacciate a quelle fisse. In questo caso, poiché ogni lamina (escluse le estreme) forma una doppia capacità con le lamine adiacenti, se N è il numero complessivo delle

lamine sia fisse che mobili, se d è la distanza tra due lamine adiacenti ed ε la costante dielettrica dell'isolante (ordinariamente aria, talvolta mica) e se S è la superficie utile di ogni lamina, la capacità massima è data da:

19.1 $$C_{max} = \varepsilon(N - 1)\frac{S}{d}.$$

Allorché le lamine mobili sono completamente disinserite dalle lamine fisse il condensatore presenta ancora un valore di capacità diverso da zero che si dice *capacità residua*. Ordinariamente interessa che sia grande il rapporto tra la capacità massima e la capacità residua. I valori massimi di capacità dei condensatori variabili possono giungere fino ad 1 o 2 migliaia di pF. Occorre infine aggiungere che la variazione di capacità in funzione dell'angolo di rotazione del rotore nei confronti dello statore non sempre è lineare, ma spesso segue una legge che risulta più opportuna per il circuito in cui il condensatore variabile deve essere inserito, ad esempio a variazione lineare di lunghezza d'onda, lineare di frequenza o logaritmica di frequenza.

Vi sono infine i condensatori *semifissi* che assumono anche il nome di *compensatori*. Questi tipi vengono realizzati in modi diversi; si può però sempre agire su di essi per variarne la capacità in modo piuttosto limitato per mezzo di un cacciavite: in genere questa regolazione vien fatta solo in occasione della messa a punto di un apparecchio o di una sua revisione.

CAPITOLO III

TEOREMI GENERALI

20. – *Generatori di tensione e di corrente. Teorema di Norton.*

I generatori possono essere generatori di tensione o corrente continua, di tensione o corrente alternata, od infine di una forma d'onda qualsiasi.

I generatori possono distinguersi in generatori ideali od in generatori reali. A loro volta sia i generatori ideali che quelli reali possono essere generatori di tensione o generatori di corrente.

Si dice *generatore ideale di tensione* quel generatore che fornisce ai suoi morsetti una tensione V_0, il cui valore risulta indipendente dalla intensità di corrente I che viene assorbita dal circuito. Il generatore ideale di tensione possiede una resistenza (o impedenza) interna nulla (fig. 20.1).

Si dice *generatore ideale di corrente* quel generatore che fornisce una corrente I_0, variabile o no, il cui valore risulta indipendente dalla tensione V che

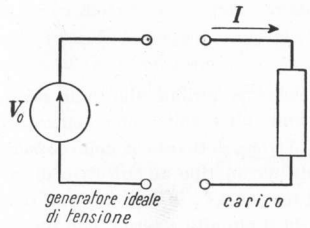


Fig. 20.1 – Generatore ideale di tensione.

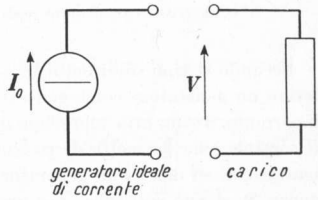


Fig. 20.2 – Generatore ideale di corrente.

si viene a stabilire ai morsetti del generatore stesso. Il generatore ideale di corrente possiede una resistenza (o impedenza) interna infinita (fig. 20.2).

I generatori reali differiscono da quelli ideali in quanto presentano sempre una resistenza (o impedenza) interna di valore finito nella quale si perde una parte della tensione o della corrente che il generatore ideale fornirebbe.

Un generatore reale di tensione V_0 avente resistenza interna R_i fornirà ai suoi capi una tensione $V = V_0 - R_i I$. Esso risulta equivalente ad un generatore ideale di tensione V_0, avente in serie una resistenza R_i (fig. 20.3).

Un generatore reale di corrente I_0 avente resistenza interna R_i fornirà

una corrente $I = I_0 - V/R_i$. Esso risulta equivalente ad un generatore ideale di corrente I_0, avente in parallelo una resistenza R_i (fig. 20.4).

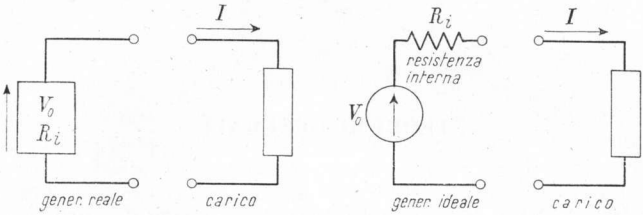


Fig. 20.3 – Generatore reale di tensione e suo circuito equivalente.

In pratica un generatore reale tende a comportarsi come un generatore ideale di tensione se ha una bassa resistenza interna (relativamente al circuito di carico), mentre tende a comportarsi come un generatore ideale di corrente se ha una elevata resistenza interna.

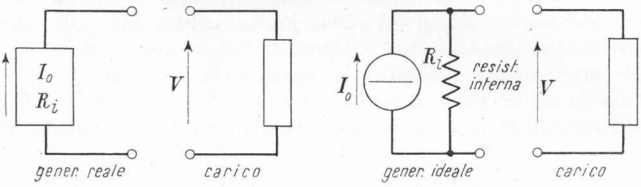


Fig. 20.4 – Generatore reale di corrente e suo circuito equivalente.

Secondo il tipo di circuito in esame può essere preferibile alle volte considerare un generatore come generatore di tensione, altre volte come generatore di corrente. Torna utile allo scopo il *teorema di Norton*, detto anche dello *scambio di sorgente*, che permette di passare facilmente da un tipo ad un altro di generatore. Esso dice: « un generatore ideale di tensione V_0 in serie ad una resistenza R_i si può sostituire, per quanto riguarda il circuito esterno, con un generatore ideale di corrente $I_0 = V_0/R_i$ avente in parallelo la stessa resistenza R_i. E viceversa un generatore ideale di corrente I_0 in parallelo ad una resistenza

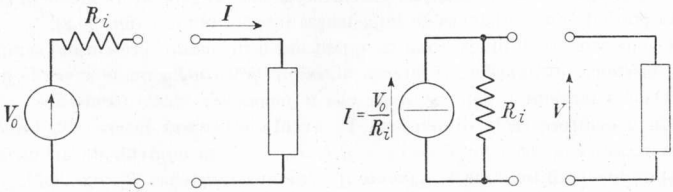


Fig. 20.5 – Trasformazione di un generatore di tensione in un generatore di corrente.

R_i si può sostituire, per quanto riguarda il circuito esterno, con un generatore ideale di tensione $V_0 = I_0 R_i$ avente in serie la stessa resistenza R_i ».

La fig. 20.5 indica la trasformazione di un generatore di tensione in un generatore di corrente, mentre la fig. 20.6 indica la trasformazione inversa, entrambe in applicazione del teorema di Norton.

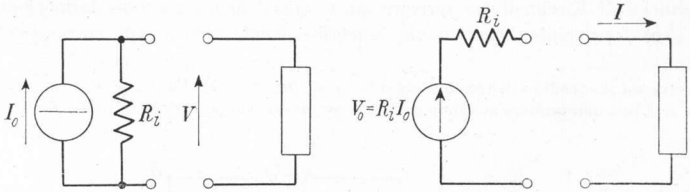


Fig. 20.6 – Trasformazione di un generatore di corrente in un generatore di tensione.

21. – *Legge di Ohm generalizzata. Principî di Kirchhoff.*

La *legge di Ohm generalizzata* permette di determinare la d.d.p. tra due punti qualsiasi di un circuito quando si conoscano le f.e.m. e le cadute di tensione presenti nei lati o tratti di lato che collegano i due punti considerati. Considerando alla stessa stregua, nei riguardi del verso, le f.e.m. e le cadute di tensione (dirette dal terminale a potenziale più basso al terminale a potenziale più elevato) la legge di Ohm generalizzata si può esprimere nel seguente modo: « la d.d.p. V_{AB} tra due punti qualsiasi A e B di un circuito è uguale alla somma algebrica delle f.e.m. e delle cadute di tensione, considerate positive se presentano il terminale a potenziale più elevato dalla parte del primo punto A e negative in caso contrario ».

Se, ad esempio, è assegnato il tratto di circuito di fig. 21.1, *a*), in base al

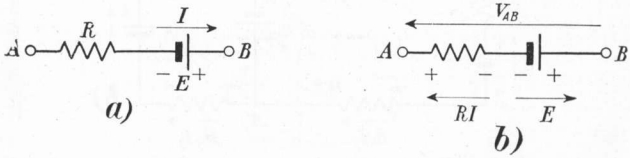


Fig. 21.1 – Rappresentazione convenzionale delle f.e.m. e delle cadute di tensione.

verso noto dell'intensità di corrente si segnano (fig. 21.1, *b*) le polarità ai capi della resistenza R e quindi le frecce che indicano il verso di RI e di E (dal negativo al positivo). La V_{AB} risulterà come somma algebrica. Essendo nei riguardi di A positiva la RI e negativa la E, si dovrà scrivere: $V_{AB} = RI - E$ [1].

[1] Come applicazione si consideri il circuito di fig. 21.2, *a*) nel quale si conoscano i versi delle intensità di corrente. Si segnino le polarità ai capi delle resistenze e le frecce

Un circuito complesso trova risoluzione sufficientemente agevole, per lo meno in via teorica, nella applicazione dei due *principi di Kirchhoff*.

Assegnati i valori delle f.e.m. e delle resistenze presenti in un circuito, si presentano come incognite le intensità di corrente che percorrono ciascun lato. Si hanno quindi tante incognite quanti sono i lati del circuito e si utilizzano i principi di Kirchhoff per scrivere tante equazioni quante sono le incognite.

a) *I principio*: « la somma algebrica delle intensità di corrente che

---

relative sia alle cadute di tensione sia alle f.e.m. (fig. 21.2, *b*). La d.d.p. V_{AB} tra i punti A e B si può determinare andando da A a B attraverso un percorso qualsiasi e ritenendo

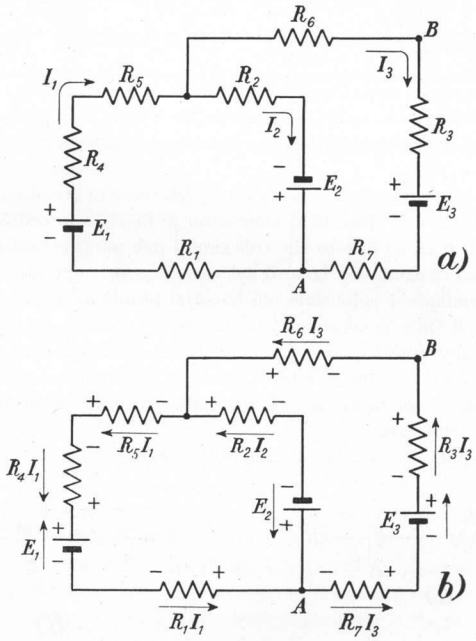


Fig. 21.2 – Esempio di applicazione della legge di Ohm generalizzata.

positive le cadute di tensione e le f.e.m. incontrate che presentano il positivo (o la punta della freccia) dalla parte del punto A e negative le altre. Così sarà:

$$V_{AB} = R_1 I_1 - E_1 + R_4 I_1 + R_5 I_1 + R_6 I_3$$

oppure

$$V_{AB} = E_2 - R_2 I_2 + R_6 I_3$$

od ancora

$$V_{AB} = - R_7 I_3 - E_3 - R_3 I_3 \ .$$

convergono (positive) o divergono (negative) da un nodo è uguale a zero »: $\sum I = 0$.

Per applicare questo principio è necessario in via preliminare fare delle ipotesi sui versi delle varie correnti. Questi versi, stabiliti arbitrariamente, saranno confermati o no dalla successiva risoluzione del sistema di equazioni. E precisamente: se il valore di una delle intensità di corrente, dato dalla risoluzione del sistema, è preceduto dal segno positivo, il verso effettivo della corrente coincide con il verso arbitrariamente stabilito; se invece il valore trovato è preceduto dal segno negativo, il verso effettivo della corrente è contrario al verso arbitrariamente stabilito.

Il primo principio di Kirchhoff si può applicare a diversi nodi, ottenendone altrettante equazioni. L'unica limitazione consiste nella necessità di non scrivere equazioni che siano combinazioni di altre equazioni già scritte; per evitare questo non bisogna scrivere equazioni riferite a nodi le cui correnti siano già state tutte interessate in equazioni scritte precedentemente.

b) *II principio*: « la somma algebrica delle f.e.m. e delle cadute di tensione che agiscono in una maglia è uguale a zero »: $\sum E + \sum V = 0$.

Per l'applicazione di questo secondo principio occorre percorrere la maglia in un verso arbitrariamente prestabilito, considerando positive le f.e.m. e le cadute di tensione concordi con tale verso e negative le altre. Anche qui, come per la legge di Ohm generalizzata, occorre considerare alla stessa stregua le f.e.m. e le cadute di tensione assegnando loro il verso che va dal punto a potenziale più basso al punto a potenziale più elevato.

Bisogna infine evitare di scrivere equazioni riferite a maglie i cui lati siano già stati tutti interessati in equazioni scritte precedentemente [1].

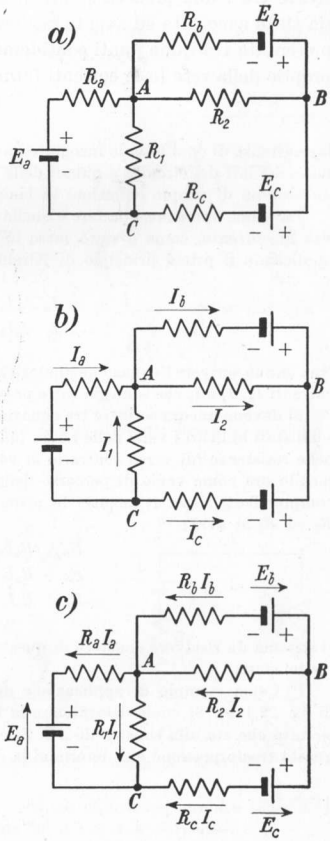


Fig. 21.3 – Esempio di applicazione dei principi di Kirchhoff.

[1] Come esempio di applicazione dei principi di Kirchhoff si vuole impostare il sistema di equazioni necessario per determinare i valori delle intensità di corrente nei singoli lati del circuito di fig. 21.3, *a*). Si osservi anzitutto che, essendo note le f.e.m. e

22. – *Teorema di Thèvenin.*

I principi di Kirchhoff, pur permettendo la risoluzione di circuiti molto complessi, sono di svolgimento prolisso. Gli stessi circuiti possono essere risolti molto più velocemente mediante l'applicazione di utilissimi teoremi.

Uno di questi è il *teorema di Thèvenin* che consente di assimilare tutta una parte di circuito ad un generatore provvisto di f.e.m. e resistenza interna. Esso si enuncia nel seguente modo: « una rete elettrica, considerata tra due generici suoi punti, è equivalente ad un generatore avente per f.e.m. la tensione esistente tra i due predetti punti quando la rimanente parte della rete elettrica sia stata asportata ed avente per resistenza interna una resistenza pari a quella presentata tra i due punti considerati, nell'ipotesi che siano nulle tutte le f.e.m. proprie della rete (o le correnti fornite da eventuali generatori di corrente) » [1].

---

le resistenze di ogni lato, le incognite da determinare risultano cinque, tale essendo il numero dei lati del circuito e quindi delle diverse intensità di corrente. Occorrerà scrivere un sistema di cinque equazioni in cinque incognite.

La prima operazione da fare è quella di assegnare dei versi arbitrari alle cinque intensità di corrente, come è stato fatto in fig. 21.3, *b*). Si possono scrivere due equazioni applicando il primo principio di Kirchhoff ai nodi A e B:

$$\begin{aligned} I_a + I_1 - I_b - I_2 &= 0 \\ I_b + I_2 + I_c \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Non si può scrivere l'equazione analoga relativa al nodo C, perché esso è interessato dalle correnti I_a, I_1 e I_c che sono già tutte presenti nelle due equazioni scritte precedentemente.

Si devono ancora scrivere tre equazioni sfruttando il secondo principio. In fig. 21.3, *c*) sono stati indicati i versi delle f.e.m. (dal negativo al positivo) e delle cadute di tensione nelle resistenze (di verso contrario ai versi delle correnti stabiliti in fig. 21.3, *b*)). Assumendo ora come verso di percorso delle maglie quello orario, e riferendosi alle maglie comprendenti rispettivamente: la prima R_a ed R_1, la seconda R_b ed R_2, la terza R_1, R_2 ed R_c si avrà:

$$\begin{aligned} E_a - R_a I_a + R_1 I_1 &= 0 \\ E_b + R_2 I_2 - R_b I_b &= 0 \\ -E_c + R_c I_c - R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema da risolvere consterà di queste tre ultime equazioni più le due ricavate precedentemente.

[1] Come esempio di applicazione del teorema di Thèvenin si consideri il circuito di fig. 22.1, *a*). Si vuole determinare la f.e.m. e la resistenza equivalenti della parte del circuito che sta alla sinistra di AB. Si consideri (fig. 22.1, *b*) solo la parte interessata a questa trasformazione e si determini la d.d.p. tra i punti A e B. È ovviamente

$$V_{AB} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Questa d.d.p. rappresenta la f.e.m. equivalente E_e nel circuito completo (fig. 22.1, *c*).

23. - *Teorema di Millman.*

Anche questo teorema riesce utilissimo nella semplificazione di circuiti elettrici. Esso è applicabile allorché un circuito è costituito da n lati aventi gli estremi comuni in due nodi A e B.

Qualora si conoscano le resistenze e le f.e.m. agenti nei singoli rami, si può calcolare la d.d.p. tra i nodi comuni mediante la seguente formula:

23.1 $$V_{AB} = R_e \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i},$$

La resistenza equivalente vista tra i punti A e B guardando verso la parte del circuito di cui si vuole fare la trasformazione si trova facilmente (ponendo $E = 0$):

$$R_e = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}.$$

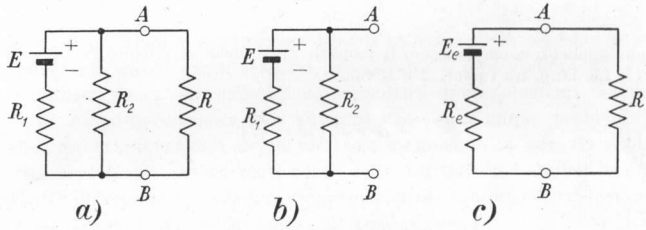


Fig. 22.1 - Primo esempio di applicazione del teorema di Thèvenin.

Come secondo esempio si consideri il circuito di fig. 22.2, *a*). Essendo, secondo lo schema di fig. 22.2, *b*),

$$V_{AB} = V'_{AB} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

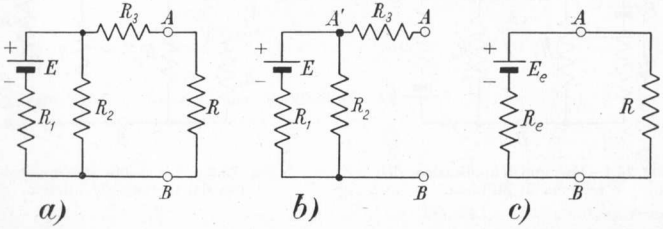


Fig. 22.2 - Secondo esempio di applicazione del teorema di Thèvenin.

questo valore rappresenta la f.e.m. equivalente da introdurre nel circuito semplificato di fig. 22.2, *c*), mentre la resistenza equivalente vista tra A e B risulta:

$$R_e = R_3 + \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}.$$

essendo

23.2 $$R_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} .$$

La 23.1 e la 23.2 sono anche esprimibili in funzione delle conduttanze G, reciproche delle resistenze R, ed allora si compongono nella

23.3 $$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} .$$

Occorre notare che le sommatorie che compaiono nella 23.1 e a numeratore della 23.3 sono sommatorie algebriche delle quali sono positivi i termini riferentisi a f.e.m. che presentano il positivo dalla parte del punto A e negative le altre [1].

---

[1] Si applichi, come esempio, il teorema di Millman al circuito rappresentato in fig. 23.1. La d.d.p. tra i punti A e B vale:

$$V_{AB} = R_e \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \right)$$

in cui

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} .$$

L'applicazione di questo teorema è più universale di quanto non appaia dalle 23.1 e 23.3. Infatti esso sarebbe ancora applicabile, ad esempio, allo schema di fig. 23.1,

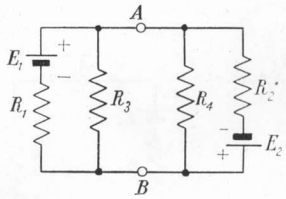


Fig. 23.1 – Esempio di applicazione del teorema di Millman.

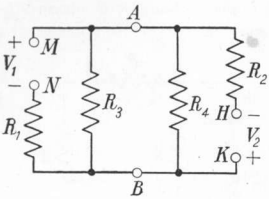


Fig. 23.2 – Estensione dell'applicabilità del teorema di Millman.

qualora (come in fig. 23.2) al posto dei generatori aventi f.e.m. E_1 ed E_2 vi fossero tra i punti MN ed HK tratti di circuito anche di composizione incognita, di cui però si conoscessero le tensioni V_1 e V_2. In questo caso si dovrebbe scrivere

$$V_{AB} = R_e \left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} \right) .$$

24. – *Principio di sovrapposizione.*

Il *principio di sovrapposizione* dice che l'effetto prodotto in un lato di un circuito comunque complesso dall'azione simultanea si diverse cause agenti nello stesso lato o in lati diversi dello stesso circuito si può determinare sovrapponendo tra loro i singoli effetti che le singole cause produrebbero nel lato in esame, qualora esse agissero una alla volta [1].

Una particolare applicazione del principio di sovrapposizione, frequente nei circuiti elettronici, è quella dello studio del comportamento di un circuito in cui agisce un generatore che opera con una componente variabile sovrapposta ad una componente continua. In questo caso si determina la risposta del circuito alle due componenti come se agissero una alla volta e si sommano gli effetti così trovati.

25. – *Teorema di Kennelly-Steinmetz.*

I teoremi precedenti, ricavati per circuiti funzionanti in corrente continua e comprendenti solo elementi resistivi, conservano la loro validità per circuiti in cui agiscano f.e.m. sinusoidali e comprendenti anche elementi reattivi. Il *teorema di Kennelly-Steinmetz* dice appunto che: « qualunque problema relativo alle correnti sinusoidali si può risolvere assumendo la formula risolutiva dello stesso problema per correnti continue e sostituendo i simboli complessi di correnti e di tensioni ai simboli reali, le impedenze e le ammettenze (complesse) dei singoli elementi alle resistenze e alle conduttanze ».

---

[1] Come esempio di applicazione del principio di sovrapposizione si consideri il circuito di fig. 24.1. Se interessa conoscere l'intensità di corrente I_4 che percorre la resistenza R_4, si può calcolarla come somma algebrica dell'intensità di corrente I'_4 che si avrebbe in R_4 qualora nel circuito agisse unicamente la E_1:

$$I'_4 = \frac{E_1}{R_1 + R_4 + \dfrac{R_3 R_2}{R_3 + R_2}}$$

e dell'intensità di corrente I''_4 che si avrebbe in R_4 qualora nel circuito agisse unicamente la E_2:

$$I''_4 = \frac{E_2}{R_2 + \dfrac{(R_1 + R_4)R_3}{R_1 + R_4 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_4 + R_3}.$$

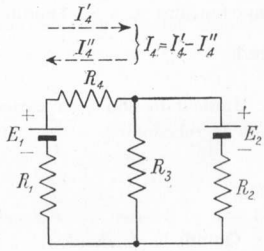


Fig. 24.1 – Esempio di applicazione del principio di sovrapposizione.

Naturalmente le due correnti risulterebbero contrarie tra loro e quindi la risultante I_4 ha valore assoluto uguale a quello che si ottiene facendo la differenza tra I'_4 ed I''_4:

$$I_4 = I'_4 - I''_4 \;;$$

il verso di I_4 è concorde con il verso della corrente parziale di valore assoluto maggiore.

CAPITOLO IV

FENOMENI TRANSITORI ED OSCILLAZIONI LIBERE

26. – *Fenomeni transitori in circuiti RC.*

Sia dato il circuito di fig. 26.1 comprendente un generatore ideale di tensione continua V_0, un resistore avente resistenza R (nella quale si congloba la resistenza interna del generatore nel caso che esso sia reale), un condensatore di capacità C ed un interruttore T inizialmente aperto. Si supponga che il condensatore sia inizialmente completamente scarico. Si vuole studiare come si comporta il circuito dopo che all'istante $t = 0$ (istante iniziale) sia stato chiuso l'interruttore T. Si conoscerà completamente il comportamento del circuito se per ogni istante successivo all'istante iniziale si saprà dare il valore della tensione v_C ai capi del condensatore, il valore dell'intensità di corrente i ed il valore della tensione ai capi della resistenza v_R.

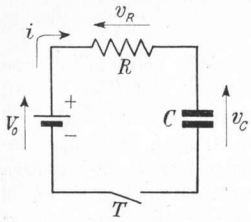


Fig. 26.1 – Circuito di carica di un condensatore attraverso una resistenza.

Dall'istante iniziale in poi la tensione V_0 dovrà equilibrare la somma delle due tensioni v_C e v_R. Quindi:

26.1 $$v_C + v_R = V_0 \,.$$

Indicando con q la carica del condensatore, istante per istante sarà valida la relazione $q = Cv_c$, derivando la quale si ottiene l'intensità i:

26.2 $$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_C}{dt} \,.$$

Quindi la v_R risulta:

26.3 $$v_R = Ri = RC\frac{dv_C}{dt} \,.$$

Operando la sostituzione indicata dalla 26.3 la 26.1 diviene:

26.4 $$v_C + RC\frac{dv_C}{dt} = V_0 \,.$$

Nella 26.4 compaiono come incognite la v_C e la sua derivata prima rispetto al tempo. Essa è quindi una equazione differenziale di primo ordine. Risolvendola si trova v_C.

Si ottiene [1]

26.10 $$\boxed{v_C = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}.$$

Si ricava la v_R dalla 26.3, derivando l'espressione di v_c data dalla 26.10 e moltiplicando per RC:

26.11 $$\boxed{v_R = V_0 e^{-t/RC}}$$

Infine dividendo per R si ottiene:

26.12 $$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \boxed{I_0 e^{-t/RC}} \text{ [2]}.$$

Le 26.10, 26.11 e 26.12 informano completamente sul comportamento del circuito di fig. 26.1 dall'istante della chiusura dell'interruttore T in poi. Gli andamenti della v_C, della v_R e della i sono illustrati dalla fig. 26.2.

Dalla fig. 26.2, *a*) che traduce graficamente la 26.10, si rileva che la v_C ha un andamento esponenziale crescente e che essa tende asintoticamente al valore V_0. Questo valore in teoria viene raggiunto solo dopo un tempo infinito; in pratica dopo un certo intervallo di tempo, più o meno breve secondo la

---

[1] Dalla 26.4 portando a secondo membro v_C e dividendo entrambi i membri per RC si ricava:

26.5 $$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}(v - V_0).$$

La 26.5 è un'equazione differenziale a variabili separabili, separando le quali si ha:

26.6 $$\frac{dv_C}{v_C - V_0} = -\frac{dt}{RC}.$$

Ora si possono integrare ambo i membri della 26.6 osservando che il primo membro è il differenziale di $ln(v_C - V_0)$:

26.7 $$ln(v_C - V_0) = -\frac{t}{RC} + lnk$$

avendo introdtto lnk come costante di integrazione. La 26.7 si può anche scrivere:

26.8 $$ln\frac{v_C - V_0}{k} = -\frac{t}{RC}.$$

Passando quindi dai logaritmi ai numeri e moltiplicando entrambi i membri per k si ha:

26.9 $$v_C - V_0 = ke^{-t/RC}$$

Il valore della costante k si trova imponendo nella 26.9 la condizione iniziale, e precisamente che per $t = 0$ deve essere $v_C = 0$. Si ricava in tal modo $k = -V_0$ che sostituito nella 26.9, dopo aver isolato v_C, dà la 26.10.

[2] Si osservi che il valore iniziale dell'intensità di corrente nel circuito è: $I_0 = \frac{V_0}{R}$, cioè il medesimo valore di corrente continua che si stabilirebbe nel circuito qualora non esistesse il condensatore.

composizione del circuito, non è più apprezzabile la differenza tra l'effettivo valore della tensione di carica del condensatore v_C ed il valore finale V_0. Si può ritenere allora che il condensatore si sia completamente caricato alla tensione V_0 con la quantità di elettricità $Q = CV_0$. Dai grafici di fig. 26.2, *b*) e di figura 26.2, *c*) che traducono rispettivamente la 26.11 e la 26.12, si rileva che, contemporaneamente all'aumento di v_C, la v_R diminuisce esponenzialmente allo stesso modo della i. Si noti anzi che con una opportuna scelta delle scale i diagrammi della v_R e della i si potrebbero sovrapporre tra loro; le due curve infatti sono simili potendosi passare dall'una all'altra dividendo o moltiplicando tutte le ordinate per la costante R. Si noti inoltre che le curve della v_c e della v_R sono complementari tra loro a V_0, in conformità alla 26.1.

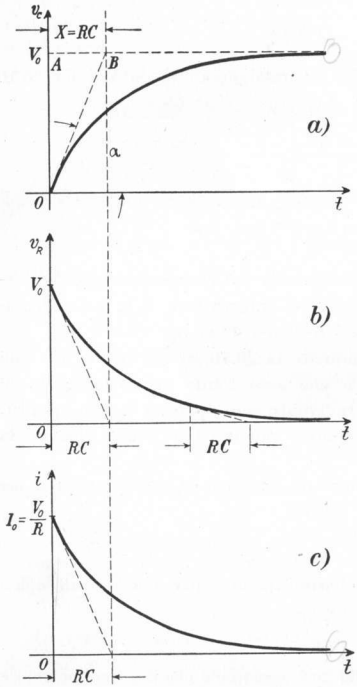


Fig. 26.2 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 26.1.

Teoricamente v_R ed i tendono ad annullarsi dopo un tempo infinito. In pratica, come dopo un certo intervallo di tempo non si apprezza più una differenza tra v_C e V_0, così non si riuscirà ad apprezzare i piccolissimi valori cui saranno scesi v_R ed i.

Come già accennato, la composizione del circuito ha molto importanza nella velocità pratica di carica del condensatore e quindi nella cessazione del fenomeno transitorio nel circuito in esame. Se difatti, a parità di ogni altra circostanza, la capacità del circuito è molto grande, ci vorrà un tempo rilevante prima che il condensatore sia completamente carico, dato che la carica Q, per una data tensione V_0, è proporzionale alla capacità C. Se, d'altra parte, è grande la resistenza R del circuito, questa ostacolerà molto il passaggio della corrente e quindi ci vorrà un tempo relativamente grande affinché sul condensatore giunga tutta la quantità di elettricità Q necessaria per caricarlo completamente. Si intuisce quindi come nel circuito in esame il transitorio si estingua in un tempo tanto più grande quanto più grande è la capacità C e quanto più grande è la resistenza R, od ancora quanto più grande è il prodotto RC. Questo prodotto RC si dice *costante di tempo* del circuito; esso non rappresenta affatto il tempo dopo il quale la corrente nel circuito si è annullata. Però di due

circuiti aventi diversa costante di tempo si può dire (in linea pratica) che la corrente si annullerà prima ed il condensatore si sarà caricato prima in quello avente una costante di tempo minore.

Si può dare un altro significato alla costante di tempo RC con il seguente ragionamento. Dalla fig. 26.2 si rileva che la v_C aumenta nel tempo ma in modo non uniforme. Per due intervalli di tempo della medesima durata l'aumento di v_C è maggiore se l'intervallo è più vicino all'istante iniziale $t = 0$. Analiticamente si può dire che la derivata della funzione v_C va diminuendo per t crescente. Se invece l'aumento della v_C avvenisse uniformemente nel tempo con la stessa velocità posseduta all'istante iniziale, ossia se la derivata della v_C si mantenesse costante ed uguale a quella corrispondente a $t = 0$, ossia infine se la curva della v_C si identificasse con la tangente condotta alla curva stessa nell'origine, la carica del condensatore anziché in un tempo infinito si completerebbe in un tempo esattamente uguale alla costante di tempo RC, nel qual tempo la v_C diverrebbe uguale a V_0 (1). 0,9974

Se, per mezzo della 26.10, si calcola il valore raggiunto dalla v_C dopo una costante di tempo, cioè per $t = RC$, si ottiene:

$$(v_C)_{t=RC} = 0{,}63 V_0 = 63\,\% V_0 .$$

La costante di tempo RC è quindi anche il tempo dopo il quale v_C raggiunge il 63% del valore finale V_0.

Se si calcola invece il valore raggiunto dalla v_C dopo 6 costanti di tempo, quindi per $t = 6RC$, si trova $(v_C)_{t=6RC} = 0{,}9974\ V_0$. Quindi praticamente dopo sei costanti di tempo si può ritenere ultimato il transitorio nel circuito (l'errore che così si commette è inferiore al $3^0/_{00}$ e quindi tecnicamente trascurabile).

Q.C.V Quanto è stato osservato per la v_C, lo si può applicare con le opportune variazioni alla v_R ed alla i. Se si conduce la tangente alla curva della v_R (o della i) nel suo punto iniziale ($t = 0$), la tangente interseca l'asse delle ascisse in un punto corrispondente a $t = RC$. La costante di tempo RC è quindi il tempo

---

(1) Se infatti si indica con α l'angolo che la tangente geometrica alla v_C nell'origine forma con l'asse dei tempi (fig. 26.2, a), per la definizione stessa di derivata si può scrivere:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dv_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{RC} .$$

D'altra parte nel triangolo OAB è:

$$X = V_0 \operatorname{ctg} \alpha = V_0 \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = V_0 \frac{RC}{V_0} = RC .$$

La costante di tempo RC rappresenta quindi il tempo dopo il quale la tensione ai capi del condensatore v_C raggiungerebbe il valore V_0 se la sua carica avvenisse uniformemente nel tempo con la stessa velocità iniziale.

dopo il quale la tensione ai capi della resistenza e l'intensità di corrente si annullerebbero qualora la loro diminuzione avvenisse uniformemente nel tempo con la stessa velocità iniziale.

Calcolando il valore di v_R e di i dopo una costante di tempo si trova che, per $t = RC$, v_R ed i si riducono al 37% del loro valore iniziale, mentre dopo sei costanti di tempo raggiungono la frazione 0,00257 del loro valore iniziale e quindi sono praticamente trascurabili.

Per quanto riguarda il bilancio energetico del circuito considerato si deve mettere in conto: l'energia fornita dal generatore durante il transitorio, l'energia ricevuta dal condensatore, detta anche energia di carica del condensatore, e l'energia dissipata nella resistenza per effetto Joule. L'energia fornita dal generatore W_G si calcola speditamente in quanto tutte le cariche elettriche sono da esso erogate sotto la f.e.m. V_0 costante. Basta quindi fare il prodotto della quantità totale di elettricità Q necessaria alla carica del condensatore per la V_0:

26.13 $$W_G = QV_0 \, .$$

Per calcolare invece l'energia di carica del condensatore W_C occorre tener presente che esso riceve la quantità di elettricità Q con una d.d.p. tra le sue armature che non è costante, ma crescente da zero fino a V_0. Quindi per ogni carica elementare occorrerà moltiplicare l'entità della carica stessa per la tensione v_C esistente tra le armature del condensatore nell'attimo in cui la carica elementare arriva su di esso; bisognerà ripetere questo calcolo per tutte le cariche elementari che giungono sul condensatore ed infine sommare tra loro tutti i prodotti così trovati per ottenere W_C. In fig. 26.3 è riportato l'andamento di v_C in funzione di q: è una retta in quanto $v_C = \frac{1}{C} q$. La parte utile del diagramma è quella compresa tra l'origine (inizio della carica) ed il punto di coordinate (Q, V_0) (termine della carica). Se Δq è la carica elementare, così piccola che durante il suo arrivo sulle armature del condensatore la tensione v_C di questo si possa ritenere costante, l'energia che con essa giunge al condensatore è data da: $v_C \times \Delta q$ ed è rappresentata dal rettangolino punteggiato in fig. 26.3. Per tutti gli altri Δq si dovranno aggiungere analoghi rettangolini, cosicché per ottenere W_C si dovrà calcolare l'area del triangolo tratteggiato in fig. 26.3. In definitiva risulta:

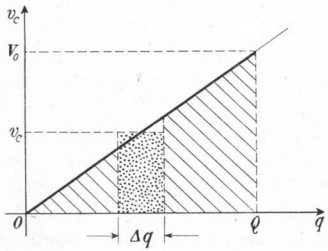


Fig. 26.3 – Energia di carica di un condensatore.

26.14 $$W_C = \frac{1}{2} QV_0$$

ed eseguendo la sostituzione $Q = CV_0$:

26.15 $$W_C = \frac{1}{2} C V_0^2 \text{ (1)} .$$

Una conclusione molto interessante si può trarre dal confronto dell'energia fornita dal generatore W_G con l'energia di carica del condensatore W_C. Si nota che quest'ultima è la metà di quella, cioè solo una metà dell'energia erogata dal generatore serve a caricare il condensatore. L'altra metà che non giunge al condensatore andrà naturalmente perduta per effetto Joule nella resistenza R e ciò indipendentemente dal valore di R (2). Ossia in qualunque circuito in cui avvenga la carica di un condensatore attraverso una resistenza il rendimento del processo di carica è del 50%.

Se un condensatore di capacità C, caricato con una tensione V_0 e quindi con una energia di carica $W_C = \frac{1}{2} C V_0^2$ viene posto nel circuito indicato in fig. 26.4, comprendente una resistenza complessiva R ed un interruttore T, e se all'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore, il condensatore si scarica sulla resistenza.

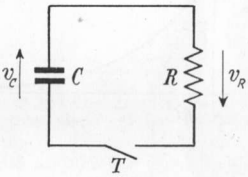


Fig. 26.4 – Circuito di scarica di un condensatore su una resistenza.

Poiché nel circuito di fig. 26.4 non esistono f.e.m. dovute a generatori, la somma delle tensioni ai capi del condensatore e della resistenza deve essere costantemente uguale a zero:

26.16 $$v_C + v_R = 0 .$$

Se ora si esegue la sostituzione indicata dalla 26.3 la 26.16 diviene:

26.17 $$v_c + RC \frac{dv_c}{dt} = 0$$

---

(1) Più speditamente si giunge al medesimo risultato osservando che

$$W_C = \int_0^{V_0} v_C dq \qquad \text{ed anche} \qquad W_C = \int_0^{V_0} C v_C dv_C$$

(poiché $dq = C dv_C$). Integrando si giunge direttamente alla 26.15.

(2) Mediante una semplice integrazione si può verificare che l'energia W_R dissipata nella resistenza R è uguale all'energia W_C.

Difatti la potenza che in ogni istante si dissipa nella resistenza R è data da Ri^2 e l'energia elementare corrispondente ad un intervallo di tempo dt risulta Ri^2dt. L'energia totale si troverà integrando quest'ultima espressione tra gli istanti $t = 0$ e $t = \infty$. Ponendo al posto della i il valore dato dalla 26.12

$$W_R = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = R \frac{V_0^2}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{V_0^2}{R} RC \frac{2}{1} \left[e^{-2t/RC} \right]_0^{\infty} ;$$

sostituendo i limiti e semplificando: $W_R = \frac{1}{2} C V_0^2$, come ci si aspettava.

e risolvendo quest'ultima equazione differenziale si ricava [1]:

26.19 $$v_C = V_0 e^{-t/RC} .$$

Poiché dalla 26.16 si ricava $v_R = - v_C$, si può scrivere:

26.20 $$v_R = - V_0 e^{-t/RC} .$$

Infine, dividendo quest'ultimo valore per R:

26.21 $$i = - \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = - I_0 e^{-t/RC} \text{ [2]} .$$

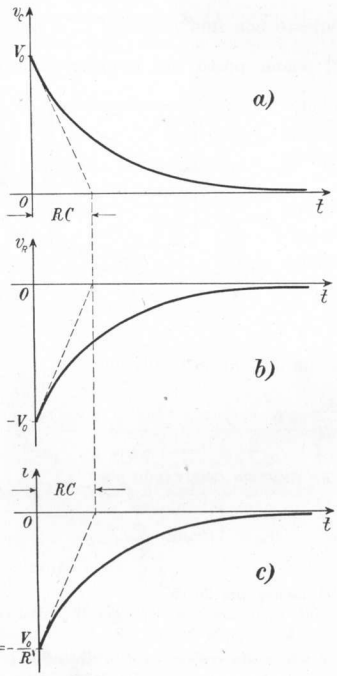


Fig. 26.5 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 26.4.

Le curve di fig. 26.5 traducono graficamente le 26.19, 26.20 e 26.21. Anche ora il comportamento del circuito dipende dalla costante di tempo RC. Quanto più essa è grande tanto maggior tempo impiegherà il condensatore a scaricarsi. La costante di tempo rappresenta il tempo dopo il quale le tre grandezze v_C, v_R ed i si ridurrebbero a zero qualora la loro diminuzione avvenisse con velocità costante pari a quella iniziale. Dopo una costante di tempo e cioè all'istante $t = RC$ le tre grandezze si sono ridotte ad un valore pari al 37% del loro valore iniziale. Per quanto teoricamente la scarica del condensatore duri un tempo infi-

---

[1] Difatti la 26.17 differisce dalla 26.4 perché in essa non compare V_0 a secondo membro. Si risolve quindi allo stesso modo, ottenendosi come relazione analoga alla 26.9:

26.18 $$v_C = k e^{-t/RC} .$$

Il valore della costante k si trova imponendo la condizione iniziale che per $t = 0$ deve essere $v_C = V_0$. Di conseguenza è $k = V_0$ che sostituito nella 26.18 conduce appunto alla 26.19.

[2] Si noti che l'intensità di corrente ha segno negativo. Ciò deriva dall'aver scritto inizialmente $i = dq/dt$. L'intensità i ha quindi il segno di dq. Nel caso della carica del condensatore dq (e quindi anche i) è positivo, mentre nel caso della scarica, ora considerato, dq (e quindi anche i) è negativo.

nito, in pratica dopo sei costanti di tempo la sua carica residua è trascurabile. L'energia $W_C = \frac{1}{2} C V_0^2$ posseduta inizialmente dal condensatore si dissipa tutta quanta nella resistenza [1].

27. – *Fenomeni transitori in circuiti RL.*

Si voglia ora studiare il transitorio che si verifica alla chiusura dell'interruttore T presente nel circuito di fig. 27.1, comprendente un generatore di f.e.m. continua V_0, una resistenza complessiva R ed una induttanza L. Al variare della intensità di corrente i si determinerà nella induttanza una f.e.m. di autoinduzione di valore $e_L = -L \frac{di}{dt}$ cui dovrà corrispondere una tensione ai capi dell'induttanza v_L di valore assoluto uguale, ma di segno contrario $v_L = L \frac{di}{dt}$. In ogni istante la f.e.m. del generatore dovrà uguagliare la somma delle due cadute di tensione nella resistenza $v_R = Ri$ e nella induttanza v_L. Risulta quindi:

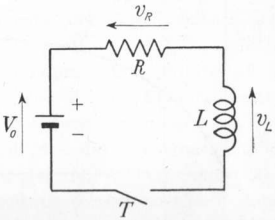


Fig. 27.1 – Circuito di carica di un induttore attraverso una resistenza.

27.1 $$v_R + v_L = V_0$$

od anche, sostituendo a v_R e a v_L i loro valori in funzione della intensità di corrente i:

27.2 $$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 \, .$$

La 27.2 è una equazione differenziale a variabili separabili, risolvendo la quale si determina [2] l'intensità i:

27.6 $$i = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-(L/R)t}) \, .$$

---

[1] Lo si può verificare calcolando l'integrale

$$W_R = \int_0^\infty R i^2 dt$$

che assume lo stesso valore già calcolato per la carica del condensatore.

[2] Mediante facili passaggi la 27.2 si trasforma nella:

27.3 $$\frac{di}{i - \frac{V_0}{R}} = -\frac{R}{L} dt$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione della i data dalla 27.6 e moltiplicando per L si ottiene:

27.7 $$v_L = V_0 e^{-(R/L)t} \; ;$$

mentre moltiplicando per R la i si ha:

27.8 $$v_R = V_0(1 - e^{-(R/L)t}) \; .$$

I grafici riferentisi alla i, alla v_L ed alla v_R sono quelli di fig. 27.2. Anche nel circuito in esame si può individuare una *costante di tempo*: essa è data da L/R. L'intensità di corrente i tende al valore di regime V_0/R che è quello che si stabilirebbe immediatamente nel circuito qualora in esso non fosse presente l'induttanza L. Il valore di regime viene raggiunto teoricamente dopo un tempo infinito a partire dalla chiusura dell'interruttore T, in pratica invece lo si può ritenere raggiunto senza commettere errore apprezzabile dopo sei costanti di tempo, cioè dopo $6L/R$. Lo stesso si può dire per l'annullamento di v_L e per il raggiungimento da parte di v_R del valore finale V_0. Si può anche aggiungere che dopo un tempo pari a L/R l'intensità di corrente i e la v_R hanno raggiunto il 63% del loro valore finale, mentre la v_L si è ridotta al 37% del suo valore iniziale V_0; i valori di regime sarebbero

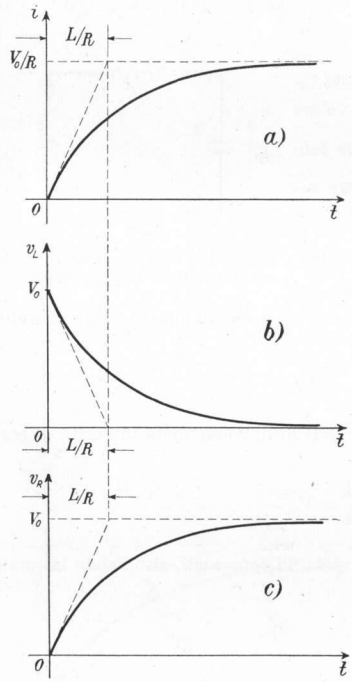


Fig. 27.2 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 27.1.

---

che integrata diviene:

27.4 $$ln \frac{i - \frac{V_0}{R}}{k} = -\frac{R}{L} t$$

essendo stato introdotto lnk come costante di integrazione. Passando quindi dai logaritmi ai numeri ed isolando la intensità di corrente i si ottiene:

27.5 $$i = \frac{V_0}{R} + k e^{-(R/L)t} \; .$$

Se ora si impone la condizione iniziale, cioè che per $t = 0$ deve essere $i = 0$, si ricava $k = -V_0/R$. Questo valore della costante di integrazione sostituito nella 27.5 fornisce appunto la 27.6.

invece raggiunti dopo il tempo L/R se nel circuito la variazione delle tensioni e della corrente avvenisse con velocità uniforme e pari a quella iniziale.

Il generatore presente nel circuito di fig. 27.1 deve fornire oltre l'energia che si dissipa nella resistenza R anche quella che serve per la creazione del campo magnetico prodotto dall'induttore. Quest'ultima si può calcolare sommando le varie energie elementari che contribuiscono ai successivi aumenti dell'intensità del campo magnetico e quindi del flusso concatenato. In fig. 27.3 è riportato l'andamento della i in funzione del flusso concatenato $\varphi_c = Li$. La parte utile del diagramma è quella compresa tra l'origine ed il punto di coordinate (LI_0, I_0) corrispondente al regime raggiunto; I_0 è il valore dell'intensità di corrente che si ha dopo che è cessato il transitorio: $I_0 = V_0/R$. Se $\Delta\varphi_c$ è l'incremento elementare del flusso concatenato, l'energia elementare corrispondente è data da: $i \times \Delta\varphi_c$ ed è rappresentata dal rettangolino punteggiato in fig. 27.3. Per tutti gli altri $\Delta\varphi_c$ si dovranno aggiungere analoghi rettangolini, cosicché per ottenere l'energia totale W_L complessivamente utilizzata dall'induttore per creare il campo magnetico corrispondente a I_0 occorrerà calcolare l'area del triangolo tratteggiato di fig. 27.3. In definitiva risulta

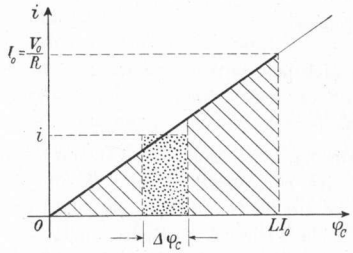


Fig. 27.3 – Energia di carica di un induttore.

27.9 $$W_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{R^2} \text{ (1)} .$$

Si supponga ora che una volta raggiunta la condizione di regime nel circuito di fig. 27.1 (divenuta cioè pari ad I_0 l'intensità di corrente), venga escluso il generatore di f.e.m. continua V_0, trasformandosi il circuito in quello di fig. 27.4. L'energia elettromagnetica immagazzinata nell'induttore si trasformerà in energia elettrica consentendo l'ulteriore passaggio di corrente nel circuito. Dovrà essere ovviamente:

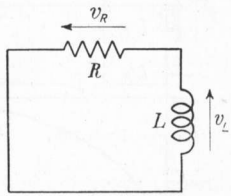


Fig. 27.4 – Circuito di scarica di un induttore su una resistenza.

27.10 $$v_R + v_L = 0$$

da cui operando come per la 27.1 e seguenti si

(1) Si può giungere al medesimo risultato mediante l'integrazione:

$$W_L = \int_0^{I_0} i d\varphi_c = \int_0^{I_0} Li di ,$$

da cui si ricava ancora la 27.9.

ottiene [1]:

27.13 $$i = I_0 e^{-(R/L)t} .$$

Moltiplicando il valore così trovato per R si ottiene la v_R:

27.14 $$v_R = RI_0 e^{-(R/L)t} ,$$

cambiando segno alla quale (secondo la 27.10), si ha:

27.15 $$v_L = - RI_0 e^{-(R/L)t} .$$

Le 27.13, 27.14 e 27.15 sono illustrate dalla fig. 27.5. Anche ora valgono le solite considerazioni relative alla costante di tempo L/R. Se poi si calcola l'energia dissipata nella resistenza R mediante l'integrale $W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt$ si ritrova la 27.9, a conferma dell'entità dell'energia precedentemente immagazzinata dall'induttore.

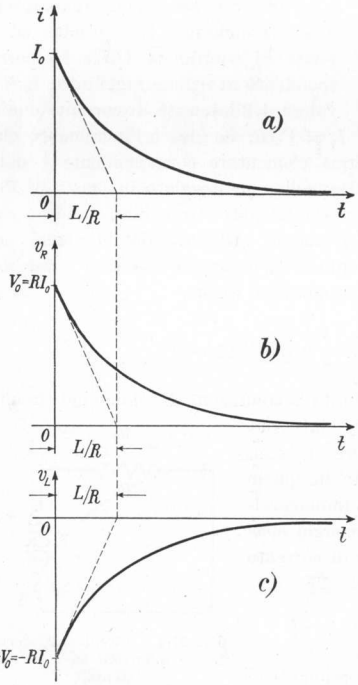


Fig. 27.5 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 27.4.

28. – *Oscillazioni libere persistenti in circuiti LC.*

Grande importanza hanno nell'elettronica, ed in particolare in alcune branche di essa, i cosiddetti *circuiti oscillatori*. Sono così definiti per il loro particolare comportamento, quei circuiti che comprendono una induttanza L ed una capacità C. Nei

---

[1] La 27.10 differisce dalla 27.1 in quanto è nullo il secondo membro. Dalla 27.10 si potrà facilmente giungere ad una relazione analoga alla 27.4, avendo ora annullato il termine in V_0:

27.11 $$ln \frac{i}{k} = - \frac{R}{L} t$$

e passando dai logaritmi ai numeri:

27.12 $$i = ke^{-(R/L)t} .$$

Imponendo la condizione iniziale, cioè che per $t = 0$ deve essere $i = I_0$, si ricava $k = I_0$ ed infine la 27.13.

circuiti oscillatori ideali, ossia privi di perdite, si considera mancante ogni causa dissipativa di energia e quindi in essa non compare nessuna resistenza R; questa invece deve sempre essere messa in conto nei *circuiti oscillatori reali*.

I circuiti in esame si dicono oscillatori perché possono essere sede di oscillazioni, cioè di variazioni periodiche tra valori di segno opposto delle grandezze elettriche: tensioni e correnti.

Le oscillazioni che si stabiliscono in un circuito oscillatorio possono essere *libere* o *forzate*. Si dicono libere quelle che spontaneamente si hanno in un circuito in cui inizialmente sia stata introdotta una certa quantità di energia (per esempio mediante la carica del condensatore). Queste oscillazioni hanno caratteristiche dipendenti dagli elementi del circuito oscillatorio; in particolare la frequenza delle oscillazioni dipenderà dai valori di induttanza e capacità presenti nel circuito ed anche dal valore di resistenza se il circuito presenta perdite. La legge di variazione delle correnti e delle tensioni è del tipo sinusoidale ad ampiezza costante se il circuito è privo di perdite: *oscillazioni persistenti*; è invece del tipo sinusoidale ad ampiezza esponenzialmente decrescente se il circuito è reale, ossia con perdite: *oscillazioni smorzate*.

Le oscillazioni forzate sono quelle che vengono imposte ad un circuito oscillatorio da un generatore di tensione o di corrente sinusoidale di frequenza determinata. In questo caso la frequenza delle oscillazioni è necessariamente quella del generatore, mentre la loro ampiezza è una funzione della frequenza, presentando un comportamento preferenziale per una particolare frequenza detta *frequenza di risonanza*. Questa frequenza coincide con quella su cui oscilla il medesimo circuito nel caso di oscillazioni libere. In questo capitolo ci si limita a studiare le oscillazioni libere.

Sia dato il circuito ideale di fig. 28.1. Esso comprenda unicamente un condensatore di capacità C ed un induttore di induttanza L. Nessuna causa di perdita sia presente nel circuito. Il condensatore sia stato preventivamente caricato con una tensione V_0; esso possiede quindi sotto forma elettrostatica una energia $W_C = \frac{1}{2} C V_0^2$. Si può affermare fin d'ora che non essendovi per ipotesi nel circuito alcuna causa dissipativa questa energia rimarrà inalterata nel tempo.

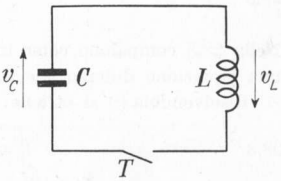


Fig. 28.1 – Circuito oscillatorio ideale.

Si supponga di chiudere l'interruttore T all'istante $t = 0$. Il condensatore inizierà la sua scarica; tuttavia a causa della presenza dell'induttore l'intensità di corrente di scarica non potrà assumere istantaneamente un valore finito, ma andrà crescendo con velocità finita. Intanto il passaggio di corrente nell'induttore determinerà un campo magnetico e quindi localizzerà nell'induttore una quantità di energia sotto forma elettromagnetica. Quando il condensatore avrà ultimata la sua scarica e la tensione tra le sue armature si sarà ridotta a zero, tutta l'energia, inizialmente elettrostatica, si sarà trasformata in energia

elettromagnetica e quindi l'intensità di corrente avrà raggiunto il suo massimo valore. L'induttore si scaricherà allora della sua energia elettromagnetica imponendo alla corrente di continuare a scorrere nel verso precedente; in tal modo ricomincerà la carica del condensatore che però sarà di segno contrario a quella iniziale. Quando l'induttore si sarà liberato di tutta l'energia elettromagnetica (intensità di corrente nulla) questa si troverà tutta nel condensatore sotto forma elettrostatica; la tensione ai capi del condensatore sarà quindi massima. A parte il segno di questa tensione, le condizioni del circuito riproducono quelle dell'istante $t = 0$; successivamente quindi tutto si ripete allo stesso modo (con i segni contrari). Sarà trascorso un periodo dall'istante iniziale quando l'intensità di corrente sarà nuovamente nulla e la tensione ai capi del condensatore sarà in valore assoluto e segno uguale a quella dell'istante $t=0$.

Per studiare analiticamente le oscillazioni libere persistenti che si stabiliscono nel circuito di fig. 28.1, occorre osservare che, non essendovi alcun generatore, in ogni istante dovrà risultare nulla la somma della tensione ai capi del condensatore v_C e della tensione ai capi della induttanza v_L:

28.1 $$v_C + v_L = 0 \, .$$

La tensione v_L si può esprimere in funzione di v_C mediante la relazione:

28.2 $$v_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} \text{ (1)} \, .$$

Sostituendo nella 28.1 il valore di v_L dato dalla 28.2 e dividendo entrambi i membri per LC, si ottiene:

28.3 $$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} v_C = 0 \, .$$

Nella 28.3 compaiono come incognite la v_C e la sua derivata seconda; essa è una equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti.

Risolvendola (2) si ottiene:

28.8 $$v_C = V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \, .$$

---

(1) Infatti è:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv_C) = C \frac{dv_C}{dt}$$

e quindi

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v_C}{dt^2} \, .$$

(2) Per risolvere la 28.3 occorre innanzitutto risolvere la sua equazione caratteristica:

28.4 $$m^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

da cui si ricava $m = \pm \sqrt{-1/LC} = \pm j \sqrt{1/LC}$ e quindi $m_1 = j \sqrt{1/LC}$ ed $m_2 = - j \sqrt{1/LC}$.

L'intensità di corrente i si può ricavare dalla 28.8 sfruttando la relazione $i = C\dfrac{dv_c}{dt}$:

28.9 $$i = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\,CV_0 \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t = -I_0 \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t$$

$i = -\frac{1}{\sqrt{LC}} C V_0 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{LC}} t$

$i = -I_0 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{LC}} t$

avendo posto $\dfrac{CV_0}{\sqrt{LC}} = I_0$.

Poiché dalla 28.1 si ricava $v_L = -v_C$ si può scrivere:

28.10 $$v_L = -V_0 \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t\,.$$

$V_L = -V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$

$V_C = V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$

Dalle 28.8, 28.9 e 28.10 si deduce che nel circuito considerato le tensioni e l'intensità di corrente hanno un andamento oscillatorio di forma rispettivamente cosinusoidale e sinusoidale. L'ampiezza delle oscillazioni è costante e la pulsazione delle oscillazioni è data da:

Solo queste FORMULE

28.11 $$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

e quindi la frequenza delle oscillazioni risulta:

28.12 $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

ed il periodo:

28.13 $$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

$T = 2\pi\sqrt{LC}$

La soluzione della 28.3 è quindi del tipo:

28.5 $$v_C = Ae^{j\sqrt{1/LC}\,t} + Be^{-j\sqrt{1/LC}\,t}$$

essendo A e B due costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Applicando le formule di Eulero ($e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha$; $e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j \operatorname{sen}\alpha$) la 28.5 si trasforma nella:

28.6 $$v_C = (A + B)\cos\sqrt{1/LC}\,t + j(A - B)\operatorname{sen}\sqrt{1/LC}\,t\,.$$

Dalla 28.6 si può ricavare l'espressione dell'intensità di corrente i mediante derivazione, essendo: $i = C\,dv_C/dt$. Si ottiene:

28.7 $$i = -\frac{1}{\sqrt{LC}}\,C(A + B)\operatorname{sen}\sqrt{1/LC}\,t + j\frac{1}{\sqrt{LC}}\,C(A - B)\cos\sqrt{1/LC}\,t\,.$$

Imponendo ora nelle 28.6 e 28.7 le condizioni iniziali, cioè che per $t = 0$ deve essere $v_C = 0$ ed anche $i = 0$, si ricava $A + B = V_0$ e $A - B = 0$. Operando queste sostituzioni le 28.6 e 28.7 si trasformano nelle 28.8 e 28.9.

Alle 28.8, 28.9 e 28.10 corrispondono le curve di fig. 28.2. L'energia elettrostatica posseduta dal condensatore è variabile istante per istante in funzione della tensione v_C ed è della forma:

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 ,$$

mentre l'energia elettromagnetica posseduta dall'induttore, anch'essa variabile istante per istante in funzione della intensità di corrente i, è della forma:

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2 .$$

Addizionando tra loro queste due espressioni ed esprimendo la v_C e la i per mezzo della 28.8 e della 28.9 si ottiene:

$$w = w_C + w_L = \frac{1}{2}(C v_C^2 + L i^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(C V_0^2 \cos^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} t + \right.$$

$$\left. + L \frac{1}{LC} C^2 V_0^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) ,$$

da cui semplificando si ricava $w = W_C$. Ciò significa che l'energia posseduta istante per istante dal circuito è costante ed uguale all'energia inizialmente fornita al circuito stesso [1], come ci si doveva attendere data l'assenza nel circuito di cause dissipative.

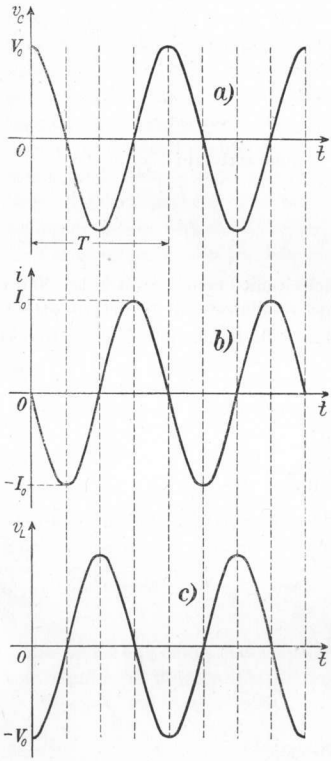


Fig. 28.2 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 28.1.

29. – *Oscillazioni libere smorzate in circuiti RLC.*

Si vogliono ora studiare le *oscillazioni smorzate* che si determinano nel circuito reale di fig. 29.1, che differisce da quello di fig. 28.1 per la presenza della resistenza R con la quale si intende rappresentare la somma delle resistenze di perdita del condensatore, dell'induttore, nonché delle resistenze dei conduttori o di resistori veri e propri presenti nel circuito.

Se il condensatore C è stato preventivamente caricato ad una tensione V_0, alla chiusura dell'interruttore T esso comincerà a scaricarsi. La corrente di

[1] Si noti che, a differenza di quanto supposto in questo paragrafo, può essere fornita al circuito oscillatorio energia iniziale, anziché sotto forma elettrostatica, sotto forma elettromagnetica mediante un impulso di corrente indotta da un circuito magneticamente accoppiato al circuito oscillatorio tramite l'induttore di induttanza L.

scarica passando nella resistenza R darà luogo ad una dissipazione di energia per effetto Joule, per cui, a differenza del caso esaminato in precedenza, l'energia totale presente nel circuito diminuisce. Tuttavia se nella prima scarica del condensatore non tutta l'energia viene dissipata, potranno ancora stabilirsi delle oscillazioni di ampiezza decrescente che andranno estinguendosi più o meno velocemente in funzione del ritmo (frequenza) con cui si svolgono le oscillazioni ed in funzione dell'entità delle cause dissipative.

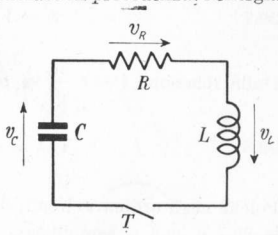


Fig. 29.1 – Circuito oscillatorio reale.

Con riferimento alla fig. 29.1 si può scrivere:

29.1 $$v_C + v_R + v_L = 0 .$$

Sostituendo alla v_L il valore dato dalla 28.2 ed essendo:

$$v_R = Ri = RC\frac{dv_C}{dt} ,$$

la 29.1 diventa (dopo aver diviso tutto per LC):

29.2 $$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = 0 .$$

La 29.2 è un'equazione differenziale di secondo ordine. Risolvendola [1] si

---

[1] L'equazione caratteristica della 29.2 risulta:

29.3 $$m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0$$

le cui soluzioni sono date dalla:

29.4 $$m = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} .$$

Si dovrebbe ora trattare i tre possibili casi, secondo se il radicando della 29.4 è negativo, nullo o positivo. Il caso più comune è quello corrispondente a radicando negativo, essendo negli ordinari circuiti oscillatori $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$. Si può allora cambiar segno al radicando e portare l'unità immaginaria j fuori della radice. Se poi per semplicità si pone $\alpha = R/2L$ ed

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

la 29.4 dà:

29.5 $$m_1 = -\alpha + j\omega$$
$$m_2 = -\alpha - j\omega .$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

ricava:

29.7 $$v_C = V_0 e^{-\alpha t} (\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sen} \omega t) .$$

Dalla relazione $i = C \frac{dv_c}{dt}$ si ottiene quindi:

29.8 $$i = - \omega \left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right) C V_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t .$$

Poiché negli ordinari circuiti oscillatori è $\alpha \ll \omega$ (ed a maggior ragione $\alpha^2 \ll \omega^2$) le 29.7 e 29.8 si semplificano nelle:

29.9 $$v_C = V_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t ;$$

29.10 $$i = - \omega C V_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t = - I_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t.$$

Se nella 29.9 si trascura momentaneamente la presenza del fattore $e^{-\alpha t}$ si vede che la v_c ha un andamento sinusoidale. Quindi nel circuito esaminato hanno luogo delle oscillazioni. La pulsazione di esse è data da ω che (secondo la nota precedente) risulta:

29.11 $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} .$$

Dalla 29.11 si ricavano la frequenza f ed il periodo T

29.12 $$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} ;$$

29.13 $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} .$$

Le 29.11, 29.12 e 29.13 si trasformano rispettivamente nelle 28.11, 28.12 e 28.13 se si pone $R = 0$.

La presenza nella 29.9 del fattore esponenziale $e^{-\alpha t}$ fa sì che i successivi

---

La soluzione della 29.2 è quindi del tipo:

29.5 $$v_C = A e^{(-\alpha + j\omega)t} + B e^{(-\alpha - j\omega)t}$$

essendo A e B le solite costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Se nella 29.5 si pone in evidenza $e^{-\alpha t}$ e si applicano le formule di Eulero, si ottiene:

29.6 $$v_C = e^{-\alpha t}[(A + B) \cos \omega t + j(A - B) \operatorname{sen} \omega t] .$$

Derivando quest'ultima espressione e moltiplicandola per C si ottiene l'intensità i. Imponendo quindi le condizioni iniziali, cioè che per $t = 0$ deve essere $v_C = 0$ ed anche $i = 0$, si ricava: $A + B = V_0$ e $j(A - B) = \alpha/\omega \cdot V_0$. Sostituendo il valore di queste costanti nelle espressioni di v_C ed i si giunge infine alle 29.7 e 29.8.

valori massimi delle sinusoidi non siano uguali, ma esponenzialmente decrescenti, rappresentando le relazioni $V_0 e^{-\alpha t}$ e $-V_0 e^{-\alpha t}$ gli inviluppi (fig. 29.2, *a*)

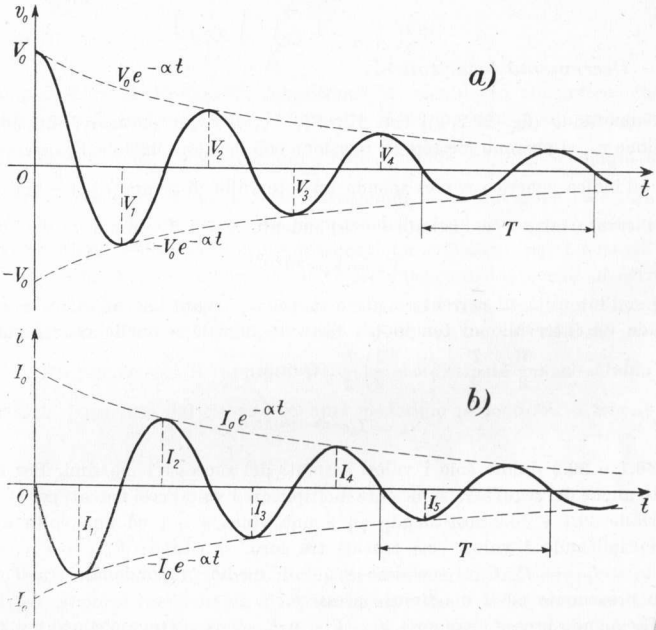


Fig. 29.2 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 29.1.

rispettivamente dei massimi positivi e negativi. Le oscillazioni in esame si dicono anche oscillazioni smorzate e si dà il nome di *coefficiente di smorzamento* del circuito ad

29.14 $$\alpha = \frac{R}{2L}\,.$$

Il reciproco del coefficiente di smorzamento, cioè $1/\alpha = 2L/R$ assume il significato di costante di tempo del circuito e rappresenta il tempo dopo il quale l'inviluppo dei massimi si è ridotto al 37% del valore iniziale.

Considerazioni analoghe a quelle fatte per la v_C e la curva di fig. 29.2, *a*) che la rappresenta si possono fare per la i e la relativa fig. 29.2, *b*). La corrente ha inizialmente un valore negativo in quanto è una corrente di scarica del condensatore. Il valore I_0 è il massimo valore di corrente da cui ha inizio l'inviluppo esponenziale decrescente dei massimi delle oscillazioni di corrente. È però un

valore che non viene mai raggiunto nel circuito, in quanto il primo massimo effettivo è già ridotto nei confronti di I_0. Il valore I_0 verrebbe effettivamente raggiunto in assenza di smorzamento.

30. – *Decremento logaritmico.*

Numerando (fig. 29.2, *a*)) con V_1, V_2, V_3, ... V_n i successivi massimi di tensione v_C, si possono mettere in relazione con il valore iniziale V_0 osservando che all'indice generico n corrisponde un intervallo di tempo di $n\frac{T}{2}$ trascorso tra l'istante iniziale e l'istante corrispondente a V_n. È quindi:

30.1 $$V_n = V_0 e^{-\alpha n(T/2)} .$$

Per l'intensità di corrente si deve invece osservare che all'indice n corrisponde un intervallo di tempo tra l'istante iniziale e quello corrispondente a V_n dato da $n\frac{T}{2} - \frac{T}{4} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}$. Quindi:

30.2 $$I_n = I_0 e^{-\alpha[n-(1/2)](T/2)} .$$

Le 30.1 e 30.2 danno solo i valori assoluti dei successivi massimi. Per tener conto anche dei segni sarà sufficiente moltiplicare i valori così trovati per $(-1)^n$.

Dalle 30.1 e 30.2 sostituendo ad n una volta $n-1$ ed una volta $n+1$ e moltiplicando i valori così trovati tra loro, si ricava: $V_{n-1} \times V_{n+1} = V_n^2$ e $I_{n-1} \times I_{n+1} = I_n^2$. Ogni massimo è quindi medio proporzionale tra il massimo precedente ed il massimo successivo.

Eseguendo invece i rapporti V_{n-1}/V_{n+1} e I_{n-1}/I_{n+1} si trova che essi per qualsiasi valori di n sono uguali a $e^{\alpha T}$.

Si dice *decremento logaritmico* δ del circuito oscillatorio il logaritmo naturale (in base e) del rapporto tra due massimi consecutivi dello stesso segno sia di tensione che di corrente. Per quanto sopra detto è quindi:

30.3 $$\delta = ln\frac{V_{n-1}}{V_{n+1}} = ln\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \alpha T .$$

Il decremento logaritmico dà una indicazione migliore del comportamento del circuito oscillatorio che non il coefficiente di smorzamento. Quest'ultimo infatti indica solo come avviene la diminuzione dei massimi senza tener conto del tempo intercorrente tra due massimi successivi cioè del periodo; di questo invece tiene conto il decremento logaritmico.

Come già detto, lo smorzamento delle oscillazioni è una conseguenza della dissipazione di energia che ad ogni periodo avviene nella resistenza R. Si potrebbe verificare in questo caso che istante per istante la somma dell'energia elettrostatica w_C posseduta dal condensatore e dell'energia elettromagnetica w_L posseduta dall'induttore differisce dall'energia inizialmente posseduta dal

circuito $W_0 = \frac{1}{2} C V_0^2$ dell'energia dissipata nella resistenza:

30.4 $$w_C + w_L = W_0 - \int_0^t R i^2 dt \, .$$

Si può dare al decremento logaritmico un significato energetico. Infatti considerando I_n come massimo intermedio di un periodo, esso corrisponderà ad una energia totale posseduta dal circuito uguale a $\frac{1}{2} L I_n^2$. L'energia dissipata nella resistenza R nel periodo corrispondente si dovrebbe calcolare con l'integrale che compare a secondo membro della 30.4 esteso però soltanto al relativo periodo. Tuttavia, con approssimazione sufficiente per i normali circuiti oscillatori, si può ritenere che il valore efficace dell'intensità di corrente si possa calcolare con $I_n/\sqrt{2}$ come per una corrente sinusoidale non smorzata. Di conseguenza l'energia dissipata nel periodo cui ci si riferisce risulta: $\frac{1}{2} R I_n^2 T$. Eseguendo ora il rapporto tra l'energia dissipata in un periodo W_T e l'energia posseduta dal circuito in quel medesimo periodo W, si trova:

30.5 $$\frac{W_T}{W} = \frac{\frac{1}{2} R I_n^2 T}{\frac{1}{2} L I_n^2} = \frac{R}{L} T = 2\alpha T = 2\delta \, .$$

Da questa relazione si deduce che il decremento logaritmico rappresenta la metà del rapporto tra l'energia dissipata in un periodo nel circuito oscillatorio e l'energia posseduta dal circuito oscillatorio in quel periodo, oppure il rapporto tra l'energia dissipata in mezzo periodo e l'energia totale. Dalla 30.5 si ricava pure:

30.6 $$W_T = 2\delta W \, .$$

Se nella 30.6 si pone $W = 1$ il primo membro si identifica con 2δ; si può quindi affermare che l'energia che in un periodo si dissipa in un circuito oscillatorio per ogni unità di energia (joule) posseduta dal circuito è uguale al doppio del decremento logaritmico. Questa è pure l'energia, corrispondente ad ogni unità energetica posseduta dal circuito, con cui occorrerà rifornire ad ogni periodo il circuito se si vorrà mantenere persistenti le sue oscillazioni.

31. – *Resistenza critica.*

Le considerazioni svolte finora si riferiscono ad un circuito oscillatorio i cui componenti sono tali da soddisfare la relazione: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ (v. nota a pag. 69). La scarica del condensatore avviene in modo nettamente diverso,

ed in ogni caso senza oscillazioni se risulta invece: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$. In questo caso infatti dalle 29.12 e 29.13 si ricava che la frequenza ed il periodo hanno valori immaginari, non reali, ossia le oscillazioni sono impossibili. La fig. 31.1 indica l'andamento assunto in tal caso della v_c e dalla i. Lo studio analitico in questo caso (d'altronde poco frequente) è più complesso del caso precedente e non è il caso di soffermarvisi.

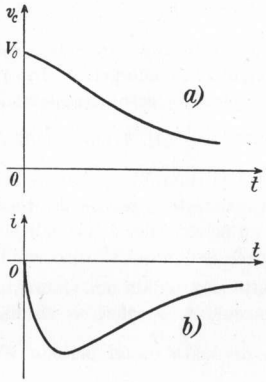


Fig. 31.1 – Andamento delle grandezze elettriche nel circuito di fig. 29.1 allorché la scarica del condensatore è aperiodica.

Si noti solo come tra i due casi visti ve ne sia uno intermedio corrispondente all'uguaglianza: $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$. Essa costituisce per un circuito oscillatorio la condizione limite tra possibilità ed impossibilità di oscillare. Il circuito già non oscilla più allorché la suddetta uguaglianza è verificata.

Riassumendo si può dire che la scarica di un condensatore su un circuito reale composto di induttanza e resistenza può avvenire in modo oscillatorio smorzato oppure in modo aperiodico. Dalle considerazioni precedenti risulta che è determinante nel funzionamento del circuito la relazione esistente tra il coefficiente di smorzamento α ed il valore $1/\sqrt{LC}$, pulsazione che competerebbe al medesimo circuito in assenza di perdite. Se è:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

il coefficiente di smorzamento si dice *critico*; nel circuito non si hanno oscillazioni. Se è:

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

il coefficiente di smorzamento si dice *supercritico* o ipercritico; nel circuito non si hanno oscillazioni. Se infine è:

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

il coefficiente di smorzamento si dice *sottocritico* o ipocritico; nel circuito si hanno oscillazioni.

A parità delle altre grandezze la possibilità che si stabiliscano oscillazioni dipende dal valore della resistenza presente nel circuito. Si dice *resistenza*

$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R^2}{2L}\right)}$

critica quella corrispondente al coefficiente di smorzamento critico. È evidentemente:

31.1 $$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Se la resistenza R presente nel circuito è inferiore alla resistenza critica calcolabile con la 31.1 nel circuito sono possibili le oscillazioni. Se invece la resistenza R presente nel circuito aumenta fino a divenire uguale o superiore alla resistenza critica le oscillazioni non sono più possibili.

$Z = \frac{1}{\omega C}$ frequenza zero → impedenza infinita
frequenza elevata → corto circuito.

CAPITOLO V

RISPOSTA DI CIRCUITI *RC*, *RL* ED *RLC* A FORME D'ONDA SINUSOIDALI. OSCILLAZIONI FORZATE.

Risposta di un circuito RC

32. – *Circuito RC in regime sinusoidale.*

Sia dato il circuito di fig. 32.1, costituito da una resistenza R in serie ad una capacità C. La tensione applicata alla serie RC, detta anche *tensione di ingresso*, sia sinusoidale di valore efficace $\overline{V}_0$ [1]. L'intensità di corrente sarà anch'essa sinusoidale come le tensioni $\overline{V}_C$ e $\overline{V}_R$ che si stabiliranno ai capi della capacità e della resistenza. Si indica col nome di *tensione di uscita*, o *risposta*, la tensione che si vuole ricavare dal circuito: potrà essere a volte la $\overline{V}_C$ a volte la $\overline{V}_R$. Se si identifica la tensione di uscita $\overline{V}_u$ nella $\overline{V}_C$ si denomina convenzionalmente il circuito RC; invece lo si denomina CR quando si preleva come tensione di uscita la $\overline{V}_R$.

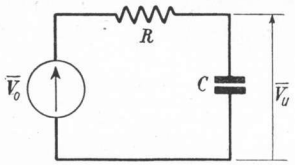


Fig. 32.1 – Circuito *RC*.

Si inizia con lo studio del comportamento del circuito RC. Ricorrendo al metodo simbolico si ha:

$$\overline{V}_u = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \overline{V}_0$$

essendo ω la pulsazione della tensione di ingresso. Moltiplicando numeratore e denominatore della relazione precedente per $j\omega C$ si ottiene:

$$\overline{V}_u = \frac{1}{1 + j\omega RC} \overline{V}_0 \,. \tag{32.1}$$

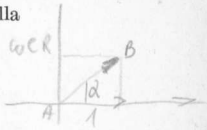
Assumendo $\overline{V}_0$ come grandezza di riferimento (fase nulla), il modulo e la fase di $\overline{V}_u$ (rispetto a $\overline{V}_0$) potranno essere ricavati dal secondo membro della relazione precedente tenendo presente che il quoto di due numeri complessi è an-

[1] Si sopralineano i simboli delle tensioni e delle correnti per indicarne con una notazione unica sia il modulo (o valore assoluto) che la fase.

all'aumentare della frequenza diminuisce l'ampiezza

cora un numero complesso avente per modulo il quoto dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti. La 32.1 può quindi essere scritta nella forma:

32.2 $$\overline{V}_u = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \Big| - \operatorname{arctg} \omega RC \, .$$



$f\alpha = 0 - \operatorname{arctg} \omega CR$

Dalla 32.2 si rileva che la $\overline{V}_u$ è sempre in ritardo rispetto alla $\overline{V}_0$ e che il suo modulo è sempre minore del modulo di $\overline{V}_0$. Si rileva anche che il ritardo aumenta ed il modulo diminuisce con l'aumentare della frequenza della tensione di ingresso. Si dice *frequenza di taglio superiore* f_2 [1] quella frequenza per la quale la tensione di uscita si riduce alla frazione $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ della tensione di ingresso. È facile constatare che ciò si verifica per quella frequenza che rende uguale ad uno il secondo termine sotto radice a denominatore della frazione presente nella 32.2: $\omega_2^2 R^2 C^2 = 1$ ossia $2\pi f_2 RC = 1$, da cui si ricava:

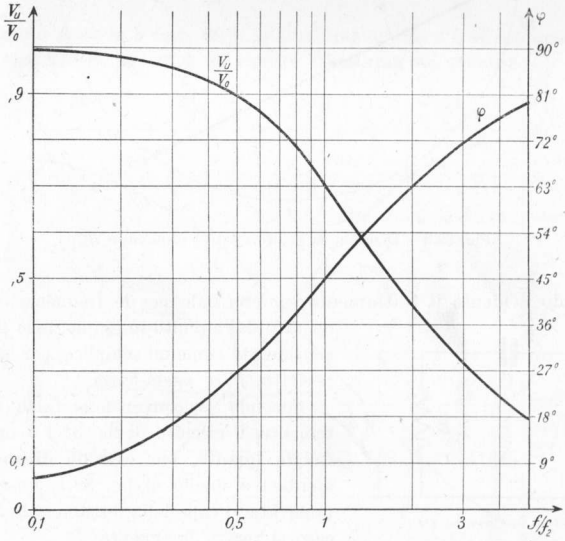
$\omega RC = 1$

$\omega = \frac{1}{RC}$

32.3 $$f_2 = \frac{1}{2\pi RC} \, .$$

$f_2 = \frac{1}{2\pi RC}$

Dalla 32.2 si rileva che alla frequenza di taglio la tensione di uscita è sfasata di 45° in ritardo rispetto alla tensione di ingresso.



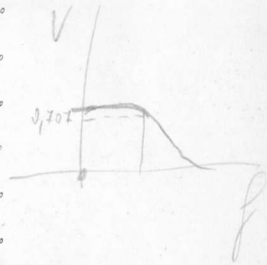


Fig. 32.2 – Risposta del circuito *RC*.

[1] L'aggettivo *superiore* sta ad indicare che il *taglio* avviene per frequenze superiori ad f_2. Il pedice 2 che compare in f_2 si contrappone al pedice 1 che comparirà quando un circuito presenterà una frequenza di taglio inferiore f_1 come si vedrà successivamente.

Si può avere una rappresentazione generale, valida per tutti i circuiti RC, se si considera il rapporto adimensionale ma complesso tra tensione di uscita e tensione di ingresso. Si ha, dalla 32.1,

$$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + jf2\pi RC} \tag{32.4}$$

e sostituendo $2\pi RC = \frac{1}{f_2}$ come si ricava dalla 32.3:

$$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}} \Big| -\operatorname{arctg} f/f_2 \,. \tag{32.5}$$

La fig. 32.2 rappresenta come variano modulo V_u/V_0 e fase φ di $\overline{V}_u/\overline{V}_0$ in funzione del rapporto f/f_2; mentre la fig. 32.3 rappresenta il diagramma polare di $\overline{V}_u/\overline{V}_0$ sul piano complesso.

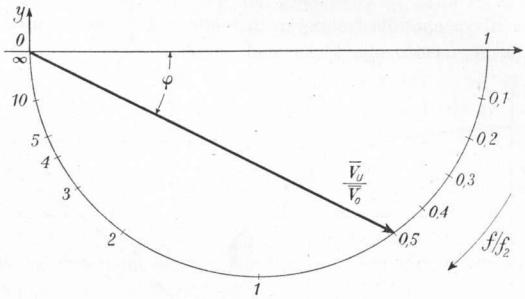


Fig. 32.3 – Diagramma polare relativo al circuito RC.

Essendo evidente il trattamento preferenziale per le frequenze più basse operato dal circuito in esame, esso può essere considerato come un semplice, per quanto imperfetto, *filtro passa-basso*.

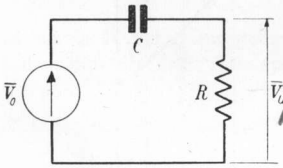


Fig. 32.4 – Circuito CR.

Secondo la convenzione fatta precedentemente, il circuito di fig. 32.4 è un circuito CR in quanto, pur essendo di costituzione identica a quello di fig. 32.1, l'uscita viene prelevata ai capi della resistenza R. In questo caso si ricava facilmente:

$$\overline{V}_u = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}\,\overline{V}_0 \,, \tag{32.6}$$

e scomponendo il secondo membro della 32.6 in modulo ed argomento:

32.7 $$\overline{V}_u = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \Bigg\lfloor \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC} .$$

La $\overline{V}_u$ è sempre in anticipo rispetto alla $\overline{V}_0$ ed il suo modulo è sempre minore del modulo di $\overline{V}_0$. L'anticipo aumenta ed il modulo diminuisce con il diminuire della frequenza della tensione di ingresso. Si dice *frequenza di taglio inferiore* f_1 quella frequenza per la quale la tensione di uscita si riduce alla frazione $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ della tensione di ingresso. La si può ottenere uguagliando a 1 il secondo termine sotto radice della frazione della 32.7. Si ricava facilmente:

32.8 $$f_1 = \frac{1}{2\pi RC} .$$

Si constati che l'espressione 32.8 coincide con la 32.3.

Il rapporto tra tensione di uscita e tensione di ingresso diviene ora:

32.9 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 - j\frac{f_1}{f}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1/f)^2}} \Bigg\lfloor \operatorname{arctg} f_1/f .$$

Come variano modulo e fase di $\overline{V}_u/\overline{V}_0$ in funzione di f/f_1 è rappresentato in fig. 32.5, mentre la fig. 32.6 ne riporta il diagramma polare.

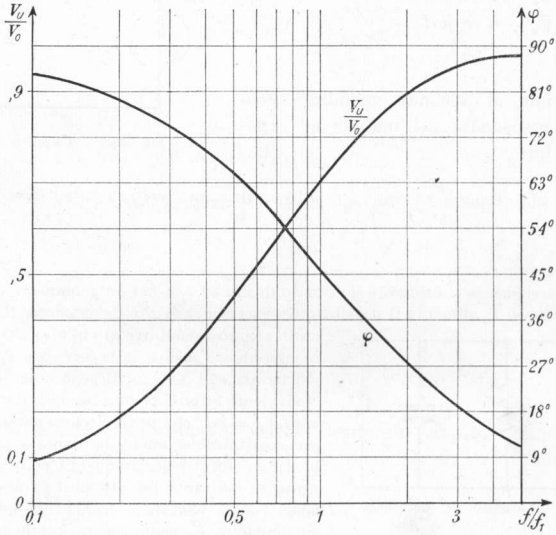


Fig. 32.5 – Risposta del circuito *CR*.

In modo complementare al circuito RC, il circuito CR può essere considerato come un semplice, per quanto imperfetto, *filtro passa-alto* (1).

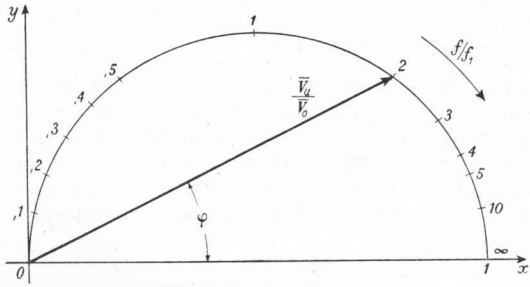


Fig. 32.6 – Diagramma polare relativo al circuito CR.

33. – *Circuito RL in regime sinusoidale.*

Per il circuito RL di fig. 33.1, analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, si può direttamente calcolare l'espressione del rapporto tra la tensione d'uscita (ai capi della induttanza) e la tensione di ingresso:

33.1 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\dfrac{R}{\omega L}} .$$

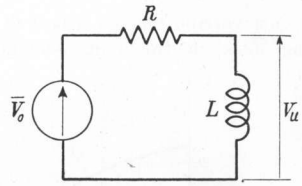


Fig. 33.1 – Circuito RL.

Scomponendo il secondo membro della relazione precedente nel modulo ed argomento si ha:

33.2 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}} \Big\lfloor \operatorname{arctg} R/\omega L .$$

(1) Rimarrebbe da considerare il circuito di fig. 32.7 in cui un generatore di corrente di valore efficace $\overline{I}_0$ alimenta il parallelo di una resistenza R e di una capacità C. Il circuito si può ricondurre al circuito RC esaminato in precedenza mediante la semplice applicazione del teorema di Norton. Il generatore di tensione equivalente fornirebbe una tensione di valore efficace $\overline{V}_0 = R\overline{I}_0$ che per il circuito parallelo in esame costituirebbe anche la risposta in corrente continua (infatti per frequenza zero la capacità presenta reattanza infinita ed il parallelo si identifica con la resistenza R). Dando quest'ultimo significato a $\overline{V}_0$ sono ancora valide le relazioni scritte per il circuito RC serie dalla 32.1 alla 32.5 come pure i relativi diagrammi.

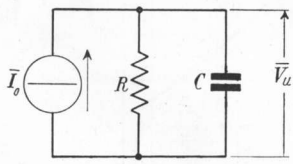


Fig. 32.7 – Circuito RC parallelo.

Si ricava facilmente la frequenza di taglio inferiore f_1 [1] uguagliando ad uno il rapporto $R/\omega L$:

33.3 $$f_1 = \frac{R}{2\pi L}\,.$$

$f_1 = \frac{R}{2\pi L}$

Sostituendo quest'ultimo valore, la 33.1 diviene:

33.4 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 - jf_1/f} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_1}{f}\right)^2}} \quad \Big\lfloor \operatorname{arctg} f_1/f\,.$$

Dalla 33.4 si rileva che la tensione di uscita è sempre in anticipo rispetto alla tensione di ingresso e di modulo minore. L'anticipo aumenta ed il modulo diminuisce con il diminuire della frequenza della tensione d'ingresso. Il circuito RL si comporta quindi come il circuito CR. E poiché le espressioni formali 32.9 e 33.4 sono identiche, i diagrammi delle fig. 32.5 e 32.6 servono anche per il circuito RL. Anche questo può essere considerato come un rudimentale filtro passa-alto.

In modo complementare si comporta il circuito di fig. 33.2 che è un circuito LR. Per esso si ricava:

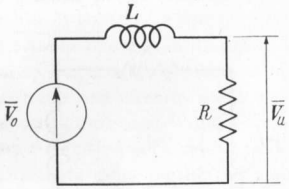


Fig. 33.2 – Circuito LR.

33.5 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\,\frac{\omega L}{R}}$$

$V_u = \frac{R V_0}{j\omega L + R} = \frac{1}{j\frac{\omega L}{R} + 1}$

equivalente a:

33.6 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}} \quad \Big\lfloor -\operatorname{arctg} \omega L/R\,.$$

Si ricava facilmente la frequenza di taglio superiore f_2 uguagliando ad uno il rapporto $\omega L/R$:

33.7 $$f_2 = \frac{R}{2\pi L}\,.$$

La 33.6 si trasforma di conseguenza nella:

33.8 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 + jf/f_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}} \quad \Big\lfloor -\operatorname{arctg} f/f_2\,.$$

Nel circuito in esame la tensione di uscita è sempre in ritardo e minore in modulo rispetto alla tensione di ingresso; il ritardo aumenta ed il modulo dimi-

[1] Che il taglio sia inferiore risulta dall'esame della 33.2; infatti diminuendo f diminuisce pure $\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0}$.

nuisce con l'aumentare della frequenza della tensione di ingresso. Il circuito LR si comporta quindi come il circuito RC ed anche ad esso si addicono i diagrammi di fig. 32.2 e 32.3. Infine anche il circuito LR può essere considerato un rudimentale filtro passa-basso [1].

34. – *Circuito risonante serie.*

Si vuole ora studiare come si comporta un circuito in cui sono presenti entrambi gli elementi reattivi, capacità ed induttanza, quando nel circuito agisce un generatore di forma d'onda sinusoidale. È già stato precedentemente accennato che in questo particolare circuito si manifestano delle *oscillazioni forzate* di frequenza uguale alla frequenza del generatore; si vedranno ora le caratteristiche di queste oscillazioni.

Si inizierà da un circuito oscillatorio serie, composto da un induttore in serie ad un condensatore. Si indichi con L e C i rispettivi valori di induttanza e capacità e si conglobi nella resistenza R tutte le cause di perdita del circuito (fig. 34.1). A frequenze non eccessivamente elevate, data l'ordinaria prevalenza delle perdite degli induttori su quelle dei condensatori, la resistenza R si identificherà o sarà leggermente superiore alla resistenza equivalente serie dell'induttore, eventualmente aumentata dal valore di resistenza dovuta a resistori inseriti nel circuito. Nel circuito agisca inoltre un generatore di tensione sinusoidale di valore efficace $\overline{V}_0$ costante e di frequenza f variabile.

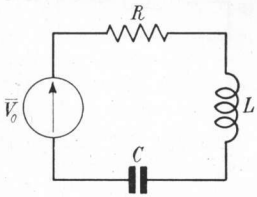


Fig. 34.1 – Circuito risonante serie.

Nel circuito in esame l'intensità di corrente dipende oltre che dagli elementi del circuito e dalla tensione $\overline{V}_0$ del generatore anche dalla frequenza f con cui esso agisce. La relazione che dà in modulo e fase l'intensità di corrente $\overline{I}$ nel circuito oscillatorio è la seguente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}} = \frac{\overline{V}_0}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}, \tag{34.1}$$

essendo $\overline{Z}$ l'espressione complessa dell'impedenza del circuito.

---

[1] Il circuito parallelo di fig. 33.3 si può ricondurre al circuito RL serie esaminato precedentemente mediante l'applicazione del teorema di Norton. La tensione fornita dal generatore di tensione $\overline{V}_0 = R\overline{I}_0$, equivalente al generatore di corrente, rappresenta anche la risposta del circuito a frequenza infinita (reattanza infinita dell'induttanza). Dando quest'ultimo significato a $\overline{V}_0$ sono ancora valide le relazioni scritte per il circuito RL serie dalla 33.1 alla 33.4 come pure i relativi diagrammi.

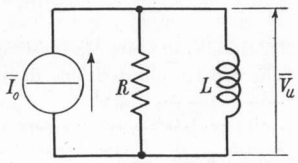


Fig. 33.3 – Circuito RL parallelo.

Assumendo $\overline{V}_0$ come grandezza di riferimento, la 34.1 può essere scritta nella forma:

34.2 $$\overline{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \Bigg\lfloor -\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Dalla 34.2 si rileva che il modulo I dell'intensità di corrente è per ogni valore di frequenza sempre inferiore al valore V_0/R che essa avrebbe qualora nel circuito mancassero gli elementi reattivi, tranne nel caso in cui la frequenza del generatore è tale da annullare la reattanza complessiva del circuito: $\omega L - \frac{1}{\omega C}$. Per questo particolare valore di frequenza il denominatore della 34.2 diviene minimo ed uguale ad R e quindi l'intensità di corrente I diviene massima e proprio uguale a V_0/R. Dalla 34.2 si rileva anche che solo in questo caso l'intensità di corrente risulta in fase con la tensione $\overline{V}_0$. Quel particolare valore di frequenza per cui si verifica il massimo di corrente nel circuito oscillatorio serie si dice *frequenza di risonanza* del circuito oscillatorio e si indica con f_0. Il suo valore può essere ricavato in funzione degli elementi del circuito imponendo la condizione di risonanza, ossia l'annullamento della reattanza totale del circuito:

34.3 $$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

dove con ω_0 si è indicata la pulsazione di risonanza del circuito, cioè quella corrispondente ad f_0. Dalla 34.3 si ricava:

34.4 $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e quindi

34.5 $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} .$$

Si può osservare che la frequenza (o la pulsazione) di risonanza coincide con quel valore di frequenza (o di pulsazione) su cui oscillerebbe liberamente il circuito qualora fosse privo di perdite. Questo fenomeno, detto della risonanza, indica che il circuito possiede una frequenza propria (quella di risonanza) alla quale le oscillazioni forzate assumono un massimo: è la stessa frequenza con la quale il circuito sceglierebbe di oscillare nel caso delle oscillazioni libere persistenti. Si dice anche che il circuito è *accordato* sulla frequenza f_0; il circuito oscillatorio prende il nome di *circuito risonante*.

La risonanza qui esaminata si dice *risonanza serie* od anche *risonanza di corrente*, appunto perché alla frequenza di risonanza è l'intensità di corrente che presenta un massimo. Se si indica con I_0 il modulo di questo massimo,

risulta (come già visto in precedenza):

34.6 $$I_0 = \frac{V_0}{R}.$$

È interessante notare come alla frequenza di risonanza la caduta di tensione nella resistenza R, che si può indicare con V_{R0}, risulti uguale alla tensione di alimentazione. Difatti $V_{R0} = RI_0 = V_0$. Ciò non significa l'annullamento della tensione ai capi della induttanza e di quella ai capi della capacità, anzi alla risonanza queste due tensioni possono assumere valori molto grandi; accade invece che essendo alla risonanza le due reattanze uguali tra loro in valore assoluto e di segno contrario, le relative tensioni, divenendo uguali in modulo e sfasate di 180°, danno una risultante nulla.

35. – *Coefficiente di risonanza.*

Si dà il nome di *coefficiente di risonanza* ε [1] del circuito risonante al rapporto tra la caduta di tensione V_{L0} che si stabilisce ai capi della induttanza L alla frequenza di risonanza f_0 (e che è uguale alla caduta di tensione V_{C0} ai capi della capacità C) e la tensione V_0 fornita dal generatore (che coincide con la caduta di tensione V_{R0} che si stabilisce ai capi della resistenza R). Il coefficiente di risonanza prende anche il nome di *coefficiente di sovratensione.* In base alla definizione precedente è quindi:

$$\varepsilon = \frac{V_{L0}}{V_0} = \frac{\omega_0 L I_0}{R I_0}$$

e semplificando:

35.1 $$\varepsilon = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

L'espressione del coefficiente di risonanza dato dalla 35.1 è formalmente simile all'espressione del fattore di merito Q di un induttore; è infatti $Q = \omega L/R$. In realtà vi sono alcune notevoli differenze. In primo luogo il fattore di merito di un induttore può essere calcolato ad una frequenza qualsiasi e presentare così valori diversi anche se, come si è visto, si mantiene abbastanza costante entro una certa gamma di frequenza che dovrebbe essere quella di normale funzionamento; il coefficiente di risonanza è invece calcolato alla frequenza di risonanza del circuito oscillatorio. In secondo luogo la resistenza R che compare nell'espressione del fattore di merito dell'induttore tiene conto unicamente delle perdite dell'induttore stesso, mentre la resistenza R che compare nell'espressione del coefficiente di risonanza rappresenta le perdite di tutto il circuito oscillatorio: è quindi maggiore della resistenza di perdita dell'induttore perché

ad essa aggiunge la resistenza di perdita del condensatore, la resistenza dei conduttori di collegamento, l'eventuale resistenza interna del generatore e la resistenza di resistori veri e propri inseriti nel circuito. Si deduce quindi che il coefficiente di risonanza di un circuito oscillatorio è sempre inferiore al fattore di merito (calcolato alla frequenza di risonanza) dell'induttore presente nel circuito. Nel migliore dei casi, ossia quando tutte le altre perdite sono trascurabili nei confronti delle perdite dell'induttore, il coefficiente di risonanza uguaglia il fattore di merito.

Essendo alla risonanza uguali tra loro la reattanza capacitiva e la reattanza induttiva: $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ la 35.1 si può anche scrivere nella forma:

35.2 $$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0 C R}\,.$$

Si osservi ancora che, per la definizione stessa del coefficiente di risonanza, la tensione che alla risonanza si determina ai capi dell'induttanza o capacità si può calcolare in modo molto semplice moltiplicando per il coefficiente di risonanza la tensione fornita dal generatore:

35.3 $$V_{L0} = V_{C0} = \varepsilon V_0\,.$$

36. – *Curva di risonanza.*

In fig. 36.1 sono indicati i diagrammi vettoriali delle grandezze elettriche che si riferiscono al circuito oscillatorio: *a*) per frequenza del generatore uguale alla frequenza di risonanza; *b*) per frequenza del generatore superiore alla frequenza di risonanza; *c*) per frequenza del generatore inferiore alla frequenza di risonanza. Per ogni frequenza del generatore occorrerebbe ricorrere ad un diagramma di tal genere.

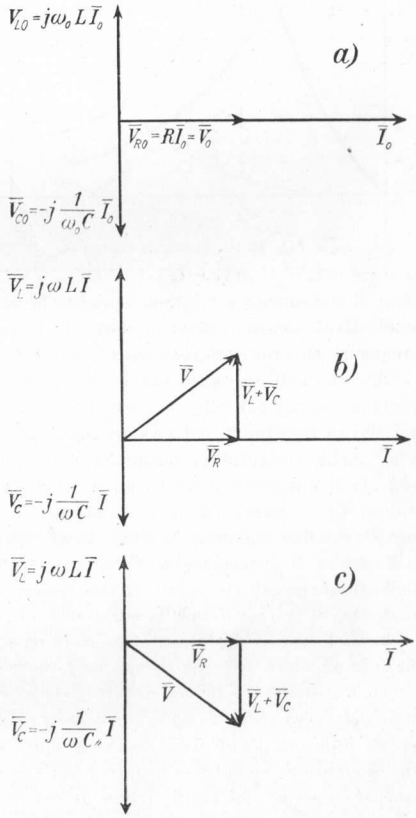


Fig. 36.1 – Diagrammi vettoriali relativi al circuito risonante serie: *a*) frequenza del generatore uguale alla frequenza di risonanza; *b*) frequenza del generatore superiore alla frequenza di risonanza; *c*) frequenza del generatore inferiore alla frequenza di risonanza.

Una visione completa del comportamento del circuito oscillatorio alle varie frequenze è invece data dalla cosiddetta *curva di risonanza* che non è altro che la traduzione grafica dell'espressione analitica 34.2 che pone in relazione tra loro l'intensità di corrente nel circuito e la frequenza del generatore. La fig. 36.2 riporta appunto la curva di risonanza di un circuito oscillatorio. In essa sono rappresentati in funzione della frequenza f (in ascisse) sia il modulo che la fase dell'intensità di corrente. Si nota come il massimo di corrente intervenga alla frequenza di risonanza f_0 e come a questa frequenza sia nullo l'angolo di sfasamento φ della corrente rispetto alla tensione del generatore, mentre l'angolo di sfasamento è positivo (corrente in anticipo: reattanza prevalentemente capacitiva) per frequenze inferiori alla frequenza di risonanza e negativo per frequenze superiori (corrente in ritardo: reattanza prevalentemente induttiva).

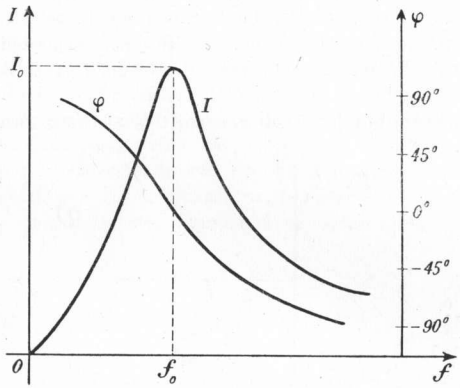


Fig. 36.2 – Curva di risonanza.

La curva di risonanza può essere tracciata dopo avere calcolato i valori di corrente corrispondenti ad un numero sufficiente di frequenze (e gli sfasamenti relativi) e riportando poi i valori così trovati sul piano I (oppure φ), f. Ma si può anche costruire graficamente nel seguente modo. Si traccia anzitutto (fig. 36.3) una retta parallela all'asse delle frequenze e distante da questa del valore R della resistenza misurata in una opportuna scala. In realtà la resistenza non è costante, ma aumenta con la frequenza; tuttavia dato che è solo un tratto della curva di risonanza che effettivamente interessa, quello situato nell'intorno della frequenza di risonanza, si può ritenere per approssimazione la resistenza costante. Si traccia quindi la curva che dà la reattanza induttiva $X_L = \omega L = 2\pi f L$. Essa è evidentemente una retta passante per l'origine avente come coefficiente angolare $2\pi L$. La curva che rappresenta la reattanza capacitiva $X_c = 1/\omega C = 1/2\pi f C$ è invece una iperbole equilatera. La differenza tra le ordinate della X_L e della X_c dà la curva della reattanza totale X del circuito. Questa curva interseca l'asse delle ascisse proprio in corrispondenza della frequenza di risonanza f_0, mentre è negativa per frequenze inferiori e positiva per frequenze superiori. Si tratta infine di ricavare la curva della impedenza $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Essa si determina punto per punto mediante la costruzione eseguita in fig. 36.3 per la frequenza f^*. Si ribalta sull'asse delle ascisse, a sinistra della origine, un segmento uguale ad R. Quindi si riporta sull'asse delle ordinate un segmento uguale alla X (mediante la parallela AB all'asse delle

ascisse). Il valore Z^* è dato dall'ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti R ed X. Riportando il segmento Z^* e tutti gli altri determinati allo stesso modo in corrispondenza di f^* e delle altre relative frequenze e congiungendo i punti così ottenuti si ricava la curva della impedenza Z. Essa presenta un minimo $Z_0 = R$ alla frequenza di risonanza. Eseguendo il reciproco di ogni valore Z e moltiplicandolo per V_0 si ottiene per punti l'andamento della $I = \frac{1}{Z} V_0$.

Poiché la curva di risonanza presenta un massimo di corrente I_0 ed è decrescente sia per frequenze inferiori che per frequenze superiori alla frequenza

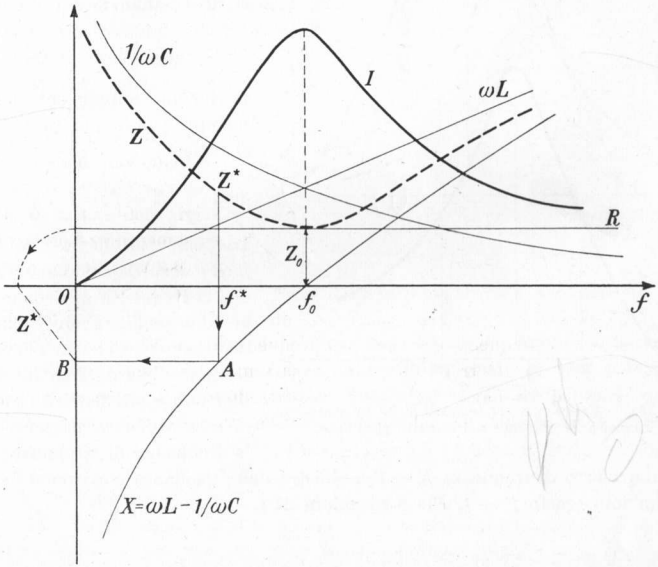


Fig. 36.3 – Costruzione della curva di risonanza.

di risonanza, uno stesso valore di corrente I' minore di I_0 si potrà avere nel circuito per due distinte frequenze: f' minore di f_0 ed f'' maggiore di f_0 (fig. 36.4). Ovviamente la corrente nel circuito avrà il medesimo valore I' per due frequenze diverse, se queste due frequenze determineranno lo stesso valore di impedenza, oppure, attesa l'invariabilità della resistenza R, il medesimo valore assoluto della reattanza. Indicando allora con X' la reattanza corrispondente alla f' e con X'' quella corrispondente ad f'', esse devono essere uguali in valore assoluto e di segno contrario (perché corrispondenti a frequenze che stanno da parti opposte rispetto ad f_0). Deve essere cioè: $X' = -X''$ e rendendo esplicite le due reattanze:

$$\omega' L - \frac{1}{\omega' C} = -\left(\omega'' L - \frac{1}{\omega'' C}\right)$$

e raccogliendo L e C:

$$L(\omega' + \omega'') = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega'} + \frac{1}{\omega''}\right)$$

od ancora:

$$\omega' + \omega'' = \frac{1}{LC}\,\frac{\omega' + \omega''}{\omega' \times \omega''},$$

da cui dividendo entrambi i membri per $(\omega' + \omega'')$ e sostituendo $1/LC = \omega_0^2$ si ricava infine:

36.1 $\qquad \omega_0^2 = \omega' \times \omega''$.

Dividendo quindi entrambi i membri per il quadrato di 2π si ottiene:

36.2 $\qquad f_0^2 = f' \times f''$.

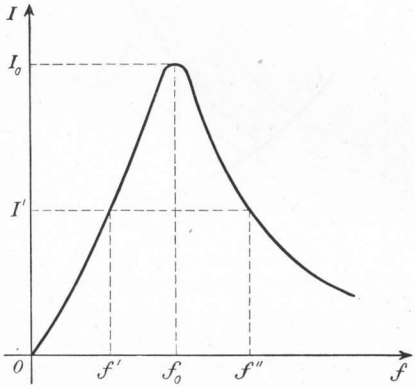


Fig. 36.4 – Frequenze per le quali si ha la medesima intensità di corrente nel circuito risonante.

La 36.2 dice che le frequenze f' ed f'' si corrispondono in modo che la frequenza di risonanza è la loro media geometrica. Si deduce anche che la curva di risonanza che dà I in funzione di f non è simmetrica rispetto all'asse verticale passante per la frequenza di risonanza; ma ad uno scarto di frequenza $f_0 - f'$ a sinistra della risonanza corrisponde verso destra uno scarto $f'' - f_0$ che è maggiore di $f_0 - f'$.

37. – *Frequenze di taglio e banda passante.*

Del circuito risonante sono caratteristiche due particolari frequenze f_1 ed f_2, la prima inferiore e la seconda superiore alla frequenza di risonanza. Esse sono quelle particolari frequenze (fig. 37.1) per cui l'intensità di corrente nel circuito assume un valore pari a $I_0/\sqrt{2}$: si dicono rispettivamente *frequenza di taglio inferiore* e *frequenza di taglio superiore*. Tra di esse esiste naturalmente la relazione $f_1 \times f_2 = f_0^2$. L'intervallo di frequenze compreso tra le due frequenze di taglio si dice *banda passante* del circuito risonante: la sua estensione vale $B = f_2 - f_1$.

Il circuito risonante è per sua natura un circuito *selettivo*; esso fa una selezione tra le varie frequenze che lo interessano riservando un trattamento particolare ad alcune di esse: innanzitutto alla frequenza di risonanza ed in secondo luogo alle frequenze ad essa più vicine. Se si limita convenzionalmente il campo

delle frequenze per così dire privilegiate a quelle comprese nella banda passante si potrà ritenere più selettivo tra due circuiti aventi la stessa frequenza di risonanza quello cui corrisponde una banda passante B di minore estensione. Il circuito ideale, cioè di resistenza nulla, sarebbe evidentemente il più selettivo in quanto l'intensità di corrente corrispondente alla frequenza di risonanza I_0 risulterebbe infinita, mentre finita sarebbe l'intensità corrispondente ad un'altra frequenza qualsiasi per quanto poco discosta dalla frequenza di risonanza. Man mano invece che si aumenta il valore della resistenza R, la banda passante aumenta ed il circuito diviene via via meno selettivo. Si può determinare con maggior precisione da quali grandezze dipenda la banda passante di un circuito oscillatorio. Indicando con $I_1 = I_0/\sqrt{2}$ l'intensità di corrente corrispondente alla frequenza di taglio inferiore (e naturalmente anche alla frequenza di taglio superiore) e con ω_1 la pulsazione di taglio inferiore: $\omega_1 = 2\pi f_1$, vale la relazione:

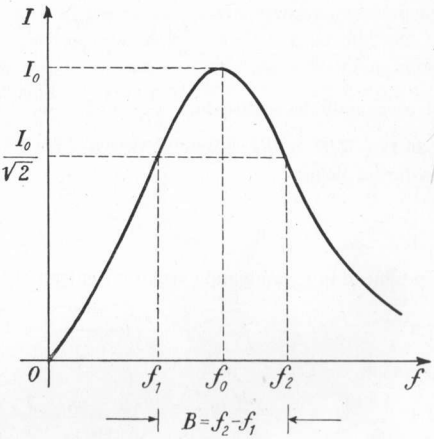


Fig. 37.1 – Frequenze di taglio e banda passante.

37.1 $$I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} .$$

Eseguendo ora il rapporto membro a membro tra la $I_0 = V_0/R$ e la 37.1 si ottiene:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}}{R} ,$$

ed elevando ambo i membri al quadrato:

$$2 = 1 + \left(\frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}\right)^2$$

da cui infine:

37.2 $$\frac{\omega_1 L - 1/\omega_1 C}{R} = \pm 1 .$$

Nella precedente relazione il segno + è da scartare in quanto la reattanza che si riferisce ad una frequenza inferiore alla frequenza di risonanza ha segno negativo. Ponendo allora in evidenza L/R:

$$\frac{L}{R}\left(\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 LC}\right) = -1 ,$$

ed eseguendo le sostituzioni $\frac{1}{LC} = \omega_0^2 = \omega_1 \times \omega_2$ (come si ricava dalle 34.4 e 36.1) e $L/R = \varepsilon/\omega_0$ (come si ricava dalla 35.1) l'uguaglianza precedente si trasforma nella:

$$\frac{\varepsilon}{\omega_0}\left(\omega_1 - \frac{\omega_1 \times \omega_2}{\omega_1}\right) = -1 .$$

Semplificando e cambiando segno ad entrambi i membri si ottiene:

37.3 $$\frac{\varepsilon}{\omega_0}(\omega_2 - \omega_1) = 1$$

$\omega_0 = \varepsilon(\omega_2 - \omega_1)$

$f_0 = \varepsilon(f_2 - f_1)$

od ancora:

37.4 $$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{\varepsilon}$$

ed infine semplificando per 2π numeratore e denominatore della frazione a primo membro:

37.5 $$\frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{1}{\varepsilon} .$$

$f_0 = \varepsilon B$

$B = \frac{f_0}{\varepsilon}$

La relazione precedente dice che in un circuito risonante avente una data frequenza di risonanza f_0 la banda passante $B = f_2 - f_1$ è tanto più ristretta quanto maggiore è il coefficiente di risonanza, e poiché banda passante più ristretta significa circuito oscillatorio più selettivo, il coefficiente di risonanza ε assume anche il significato di coefficiente di selettività. La 37.5 trasformata nella

37.6 $$B = \frac{f_0}{\varepsilon}$$

a pag. 6

permette di calcolare analiticamente la banda passante di un circuito oscillatorio quando se ne conoscano i componenti [1]; trasformata invece nella

37.7 $$\varepsilon = \frac{f_0}{B}$$

---

[1] Qualora di un circuito risonante si conoscano la frequenza di risonanza f_0 e la banda passante B, si possono determinare le frequenze di taglio inferiore f_1 e superiore f_2 mediante il sistema:

$$f_1 \times f_2 = f_0^2$$
$$f_2 - f_1 = B .$$

La prima equazione è ricavata dalla 36.2, la seconda dalla 37.6. Risolvendo il sistema

permette di calcolare il coefficiente di risonanza di un circuito oscillatorio dalla conoscenza della sua curva di risonanza ricavata anche in modo sperimentale. Basterà a tal fine tracciare una parallela all'asse delle ascisse distante da esso $I_0/\sqrt{2}$, fino ad intersecare la curva di risonanza. Le frequenze corrispondenti ai punti di intersezione sono le frequenze di taglio superiore f_2 ed inferiore f_1; trovandone la differenza B, leggendo la frequenza di risonanza ed infine applicando la 37.7 si ricava il coefficiente di risonanza [1].

---

sopra scritto e scartando le soluzioni negative, prive di significato, si trova:

$$f_1 = -\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + f_0^2}$$

$$f_2 = \frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + f_0^2} \, .$$

Se il circuito è molto selettivo e quindi, secondo la 37.6, B è molto minore di f_0, le relazioni precedenti si possono semplificare nelle:

$$f_1 \simeq f_0 - \frac{B}{2}$$

$$f_2 \simeq f_0 + \frac{B}{2}$$

cioè non si commette errore apprezzabile considerando f_0 come media aritmetica tra le frequenze di taglio.

[1] Il coefficiente di risonanza si può ricavare dalla curva di risonanza anche senza fare ricorso alle frequenze di taglio (delle quali la curva di risonanza potrebbe risultare mancante). Basta a tal fine determinare le frequenze $f' < f_0$ ed $f'' > f_0$ corrispondenti ad una medesima generica I' minore di I_0 ed eseguire il rapporto tra la $I_0 = \frac{V_0}{R}$ e la

$$I' = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega' L - \frac{1}{\omega' C}\right)^2}}$$

ottenendo:

$$\frac{I_0}{I'} = \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega' L - \frac{1}{\omega' C}\right)^2}}{R} \, .$$

Se si eleva a quadrato e si scompone in due termini il secondo membro:

$$\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\omega' L - \frac{1}{\omega' C}}{R}\right)^2$$

si può ricavare:

37.8 $$\frac{\omega' L - \frac{1}{\omega' C}}{R} = \pm \sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1} \, .$$

Scartando quindi il segno $+$, osservando che la 37.8 differisce dalla 37.2 solo per il secondo membro che è una costante ed eseguendo sul primo membro della 37.8 i medesimi passaggi eseguiti dalla 37.2 in poi si giunge alla relazione più generale della 37.7:

37.9 $$\varepsilon = \frac{f_0}{f'' - f'} \sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1} \, .$$

Nello studio dei circuiti oscillatori soggetti ad oscillazioni smorzate era stato determinato come grandezza caratteristica del circuito il decremento logaritmico δ. Si vuole ora determinare una relazione esistente tra δ ed il coefficiente di risonanza ε di uno stesso circuito oscillatorio. Se si suppone che sia $(R/2L)^2$ molto minore di $1/LC$, il periodo T delle oscillazioni smorzate si potrà calcolare con $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Moltiplicando quindi il periodo per il coefficiente di smorzamento $\alpha = R/2L$ si ottiene il decremento logaritmico:

$$\delta = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} .$$

Il coefficiente di risonanza ε si può invece scrivere sostituendo ad ω_0 il valore dato dalla 34.4:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Se ora si moltiplicano tra loro le ultime espressioni trovate per ε e δ si ricava:

37.10 $$\varepsilon \times \delta = \pi .$$

La 37.10 dice che il coefficiente di risonanza ed il decremento logaritmico di uno stesso circuito oscillatorio sono tra loro inversamente proporzionali secondo il coefficiente π.

38. *Circuito risonante serie a variazione di capacità o di induttanza.*

Nel paragrafo precedente è stato esaminato il comportamento di un circuito risonante al variare della frequenza del generatore. Ora invece si supponga che il generatore di tensione $\overline{V}_0$ abbia frequenza f costante e che sia variabile la capacità C del circuito (fig. 38.1).

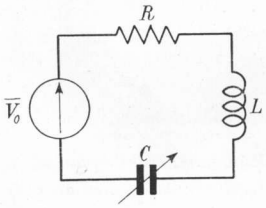


Fig. 38.1 – Circuito risonante serie a variazione di capacità.

L'espressione analitica che dice come varia l'intensità di corrente nel circuito al variare della capacità C è ancora la 34.1 in cui però f deve essere considerata costante mentre la variabile indipendente è C. Il massimo di corrente si avrà nel circuito per quel particolare valore di capacità C_0 che annulla la reattanza totale. Si ricava facilmente:

38.1 $$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$$

essendo ω la pulsazione costante del generatore. Anche in questo caso alla risonanza, cioè per $C = C_0$, l'intensità di corrente sarà massima ed uguale a $I_0 = V_0/R$.

Anche ora si può tracciare graficamente la curva di risonanza che porterà in ascisse la capacità variabile C. Si comincia (fig. 38.2) dalla retta parallela all'asse delle ascisse e distante da esso del valore R. In questo caso la rappre-

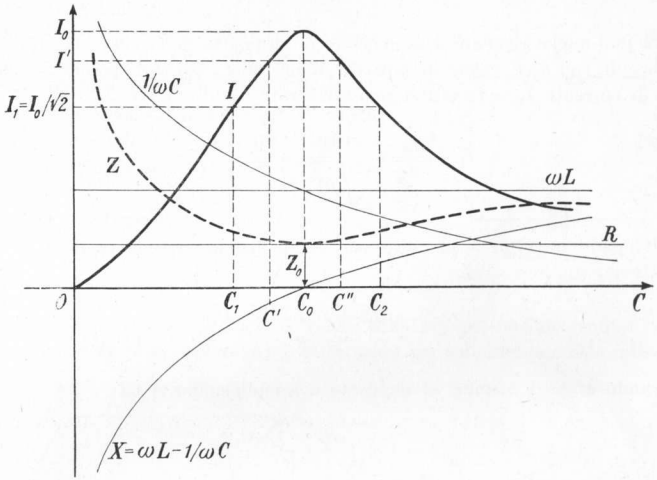


Fig. 38.2 – Costruzione della curva di risonanza relativa al circuito di fig. 38.1.

sentazione è più esatta che nel caso precedente poiché la frequenza è costante. La reattanza induttiva $X_L = \omega L$ è anch'essa rappresentata da una retta parallela all'asse delle ascisse. La reattanza capacitiva $X_C = 1/\omega C$ è rappresentata da una iperbole equilatera. La differenza tra le ordinate di X_L e di X_C dà la curva della reattanza totale X. Essa interseca l'asse delle ascisse per $C = C_0$; è negativa per $C < C_0$ e positiva per $C > C_0$. Nel modo consueto si ricava quindi l'impedenza Z che presenta un minimo $Z_0 = R$ per $C = C_0$ e tende invece a $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ per C tendente ad infinito. Di conseguenza l'intensità di corrente pur diminuendo per $C > C_0$ non tende a zero ma ad un valore finito.

Si può determinare la relazione esistente tra due valori di capacità C' e C'' uno minore e l'altro maggiore di C_0, cui corrisponda il medesimo valore di intensità I'. Occorrerà che in entrambi i casi il circuito presenti la medesima impedenza, o, essendo costante la resistenza, la medesima reattanza. Tenendo conto opportuno dei segni bisogna quindi imporre:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C'} = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C''}\right)$$

e con facili passaggi si ricava:

$$2\omega^2 L = \frac{C' + C''}{C' \times C''}.$$

Sostituendo infine ad ω^2 il valore $1/LC_0$ ricavato dalla 38.1, si può ottenere:

38.2 $$C_0 = 2\,\frac{C' \times C''}{C' + C''}\,.$$

Si può anche ricavare il coefficiente di risonanza dalla curva di risonanza. Indicando con C_1 il valore di capacità minore di C_0 cui corrisponde una intensità di corrente $I_1 = I_0/\sqrt{2}$ si può scrivere:

$$I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}}$$

e dividendo membro a membro per l'uguaglianza precedente la $I_0 = V_0/R$ si ottiene:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C_1)^2}}{R}\,.$$

Elevando ambo i membri al quadrato e semplificando si ha:

$$2 = 1 + \left(\frac{\omega L - 1/\omega C_1}{R}\right)^2$$

e quindi:

$$\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C_1}}{R} = \pm 1\,.$$

Nella precedente relazione il segno $+$ è da scartare essendo $C < C_0$; ponendo in evidenza $\omega L/R$:

$$\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{1}{\omega^2 L C_1}\right) = -1$$

ed operando le sostituzioni $\omega L/R = \varepsilon$ e $1/\omega^2 L = C_0$ (ricavata dalla 38.1) risulta:

$$\varepsilon\left(1 - \frac{C_0}{C_1}\right) = -1$$

da cui infine si ottiene:

38.3 $$\varepsilon = \frac{C_1}{C_0 - C_1}\,.$$

Determinati quindi su una curva di risonanza i valori C_0 e C_1, il coefficiente di risonanza del circuito cui la curva di risonanza si riferisce si ricava per mezzo della 38.3.

Sostituendo poi in quest'ultima a C_0 il valore dato dalla 38.2 si ottiene:

38.4 $$\varepsilon = \frac{C_1 + C_2}{C_2 - C_1}$$

di interpretazione evidente [1].

Oltre i circuiti risonanti serie a variazione di frequenza oppure di capacità, si può considerare quello a variazione di induttanza L (fig. 38.3). Lo studio si può eseguire in modo analogo allo studio dei precedenti circuiti. La fig. 38.4 indica la costruzione della curva di risonanza.

Si può determinare inoltre:

38.7 $$L_0 = \frac{L' + L''}{2}$$

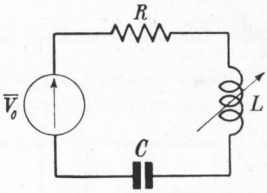


Fig. 38.3 – Circuito risonante serie a variazione di induttanza.

avendo indicato con $L_0 = 1/\omega^2 C$ il valore d'induttanza che determina la risonanza e con L' ed L'' due valori di induttanza per cui si ha la stessa intensità

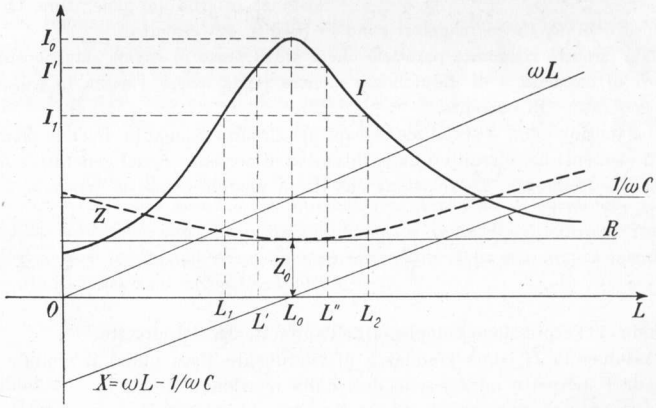


Fig. 38.4 – Costruzione della curva di risonanza relativa al circuito di fig. 38.3.

---

[1] Operando anche ora come nella nota di pag. 91, si può ricavare il coefficiente di risonanza dalla curva di risonanza di un circuito risonante serie a variazione di capacità facendo riferimento ad una intensità di corrente I' qualsiasi. Se C' e C'' sono le corrispondenti capacità, si ottiene:

38.5 $$\varepsilon = \frac{C'}{C_0 - C_1}\sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1}$$

od anche:

38.6 $$\varepsilon = \frac{C' + C''}{C'' - C'}\sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1}\ .$$

di corrente I'. Se poi L_1 ed L_2 sono quei due particolari valori di induttanza per cui si ha la medesima intensità $I_1 = I_0/\sqrt{2}$, si ricava:

38.8 $$\varepsilon = \frac{L_0}{L_0 - L_1} = \frac{L_1 + L_2}{L_2 - L_1} \text{ (1)} .$$

39. – *Circuito risonante parallelo.*

Spesso occorre prendere in considerazione dei circuiti risonanti alimentati da un generatore di corrente $\overline{I}_0$ anziché da un generatore di tensione. Un circuito di questo genere è rappresentato in fig. 39.1. In esso oltre la capacità C e l'induttanza L è rappresentata la resistenza parallelo R_p che congloba in sè ogni causa di perdita: essa risulta dal parallelo della resistenza di perdita parallelo dell'induttore con quella del condensatore ed ancora con l'eventuale resistenza interna del generatore. Quanto minore è la R_p tanto maggiori sono le perdite del circuito.

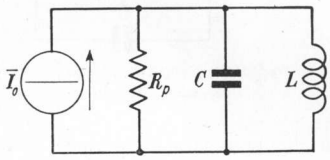


Fig. 39.1 – Circuito risonante parallelo.

Nel circuito risonante parallelo che è stato preso in esame siano costanti i valori di capacità e di induttanza, mentre possa essere variata la frequenza del generatore di corrente.

La tensione che si stabilisce ai capi del circuito risonante dipende oltre che dagli elementi del circuito e dalla intensità di corrente $\overline{I}_0$ del generatore anche dalla sua frequenza. La relazione che dà in modulo e fase la tensione $\overline{V}$ è la seguente:

39.1 $$\overline{V} = \frac{\overline{I}_0}{\overline{Y}} = \frac{\overline{I}_0}{\dfrac{1}{R_p} + j(\omega C - 1/\omega L)} ,$$

essendo $\overline{Y}$ l'espressione complessa dell'ammettenza del circuito.

Assumendo $\overline{I}_0$ come grandezza di riferimento (fase nulla) il modulo e la fase di $\overline{V}$ (rispetto ad $\overline{I}_0$) sono dati dalla relazione:

39.2 $$\overline{V} = \frac{I_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{R_p}\right)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \Bigg\lfloor - \operatorname{arctg} \frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R_p}} .$$

(1) Anche in questo caso se I' è una generica intensità di corrente corrispondente ad L' ed L'' si può ricavare:

38.9 $$\varepsilon = \frac{L_0}{L_0 - L'} \sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1}$$

ed anche:

38.10 $$\varepsilon = \frac{L' + L''}{L'' - L'} \sqrt{\left(\frac{I_0}{I'}\right)^2 - 1} .$$

Il massimo valore di tensione V_0 si ottiene per quella particolare frequenza f_0, detta frequenza di risonanza del circuito, per la quale la suscettanza complessiva $\omega C - 1/\omega L$ si annulla, di modo che l'impedenza complessiva vista dal generatore diviene uguale alla resistenza R_p. Alla risonanza è quindi:

39.3 $$V_0 = I_0 R_p \, .$$

L'annullamento della suscettanza complessiva si verifica per la pulsazione:

39.4 $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e quindi per la frequenza:

39.5 $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \, .$$

Per un circuito risonante parallelo la risonanza si verifica dunque per la stessa frequenza per la quale si verifica la risonanza per un circuito risonante serie composto dei medesimi elementi; mentre però nel circuito risonante serie si ha alla risonanza un massimo di corrente, per il circuito risonante parallelo si ha un massimo di tensione. Il circuito si dice accordato sulla frequenza f_0.

Alla risonanza l'intensità di corrente $I_{R_p 0}$ che interessa la resistenza R_p è tutta la I_0 fornita dal generatore, difatti $I_{R_p 0} = V_0/R_p = I_0$ come risulta dalla 39.3. L'intensità di corrente I_{c0} che, sempre alla risonanza, interessa la capacità è uguale come modulo alla intensità di corrente I_{L0} che interessa l'induttanza mentre esse sono sfasate tra di loro di 180° in modo da dare risultante nulla.

Si dà il nome di *coefficiente di risonanza* ε (o *coefficiente di sovracorrente*) del circuito risonante parallelo al rapporto tra l'intensità di corrente che alla risonanza si ha nella capacità o nell'induttanza e l'intensità di corrente fornita dal generatore (ed uguale a quella assorbita dalla resistenza R_p). Facendo le opportune sostituzioni si ricava:

$$\varepsilon = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{\omega_0 C V_0}{V_0/R_p} = \omega_0 C R_p = \frac{R_p}{\omega_0 L} \, .$$

È quindi:

39.6 $$\varepsilon = \frac{R_p}{\omega_0 L} = \omega_0 C R_p \, .$$

Anche ora vale il confronto eseguito tra coefficiente di risonanza e fattore di merito dell'induttore a proposito del circuito risonante serie: il coefficiente di risonanza è sempre minore del fattore di merito.

Si ricava pure che l'intensità di corrente che alla risonanza percorre la capacità (e quindi anche quella che percorre l'induttanza) è data dal prodotto del coefficiente di risonanza per l'intensità di corrente fornita dal generatore, ossia:

39.7 $$I_{C0} = I_{L0} = \varepsilon I_0 \, .$$

In fig. 39.2 è riportata la curva di risonanza di un circuito risonante parallelo. Rappresenta in funzione della frequenza f del generatore il modulo V e la fase φ della tensione che si stabilisce ai capi del circuito risonante. In figura 39.3 è invece indicata la costruzione grafica della curva di risonanza, su cui non ci si sofferma dato che per essa si procede in modo del tutto analogo al tracciamento della curva di risonanza di un circuito risonante serie.

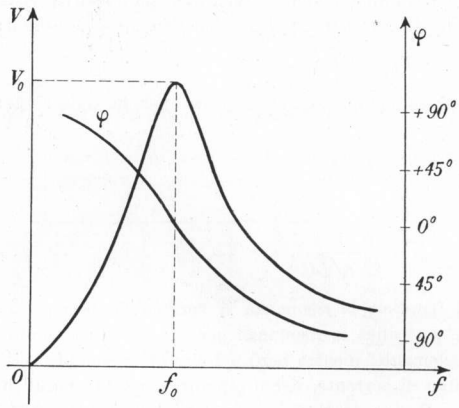


Fig. 39.2 – Curva di risonanza di un circuito risonante parallelo.

Anche per il circuito risonante parallelo tra due frequenze f' ed f'' una minore e l'altra maggiore della frequenza di risonanza f_0 e che si corrispondano in modo da determinare ai capi

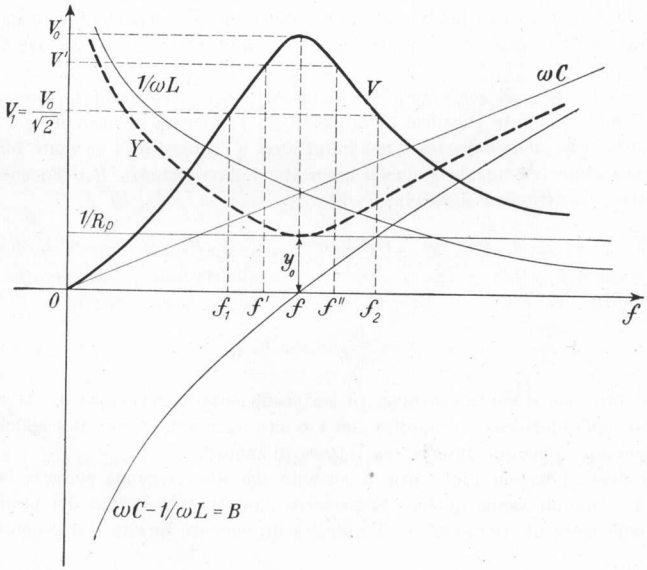


Fig. 39.3 – Costruzione della curva di risonanza di un circuito risonante parallelo.

del circuito la medesima tensione V' esiste la relazione: $f_0^2 = f' \times f''$. Assumono ora il nome di *frequenza di taglio inferiore* f_1 e *frequenza di taglio superiore* f_2 quelle due frequenze rispettivamente minore e maggiore della frequenza di risonanza, in corrispondenza delle quali la tensione ai capi del circuito ha un valore pari a $V_0/\sqrt{2}$. Si dice *banda passante* l'insieme di frequenze comprese tra le due frequenze di taglio; la sua ampiezza B si calcola facendo: $B = f_2 - f_1$.

Anche per il circuito risonante parallelo rimangono valide le relazioni, già ricavate per il circuito risonante serie,

39.8 $$B = \frac{f_0}{\varepsilon}$$ (v. nota a pag. 90)

e

39.9 $$\varepsilon = \frac{f_0}{B}$$ [1] .

Si vuole ora stabilire la relazione esistente tra la resistenza R_p, detta resistenza parallelo od anche *resistenza dinamica*, di un circuito risonante parallelo e la resistenza R, detta resistenza serie, di un circuito risonante serie composto con i medesimi elementi. Se nei due circuiti si addossano tutte le perdite all'induttore, il suo coefficiente di merito diminuisce e diviene uguale al coefficiente di risonanza del circuito di cui fa parte. Ma poiché si tratta per entrambi i circuiti del medesimo induttore e naturalmente si hanno le stesse perdite, il fattore di merito per così dire complessivo, equivalente al coefficiente di risonanza, dovrà avere il medesimo valore per entrambi i circuiti. Imponendo allora l'uguaglianza di $\varepsilon = R_p/\omega_0 L$ con $\varepsilon = \omega_0 L/R$

$$\frac{R_p}{\omega_0 L} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

si ricava:

$$R_p = \frac{\omega_0^2 L^2}{R} = \frac{1}{LC}\,\frac{L^2}{R}$$

ed infine:

39.11 $$R_p = \frac{L}{RC} .$$

La 39.11 permette, conoscendo gli elementi di un circuito risonante serie con la resistenza complessiva di perdita R, di ricavare la resistenza dinamica che compete al circuito risonante parallelo formato con gli stessi elementi.

---

[1] Si trova pure, analogamente alla 37.9:

39.10 $$\varepsilon = \frac{f_0}{f'' - f'}\sqrt{\left(\frac{V_0}{V'}\right)^2 - 1}$$

con i simboli di evidente significato.

La fig. 39.4, si riferisce ad un circuito risonante parallelo nel quale è variabile la capacità del condensatore mentre il generatore di corrente ha frequenza costante. In fig. 39.5 è riportata la costruzione della relativa curva di risonanza. Usando le solite notazioni, per questo circuito si può ricavare:

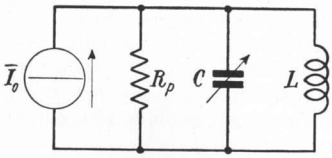


Fig. 39.4 – Circuito risonante parallelo a variazione di capacità.

39.12 $$C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

ed inoltre:

39.13 $$\varepsilon = \frac{C_0}{C_0 - C_1} = \frac{C_1 + C_2}{C_2 - C_1} \text{ (1)} .$$

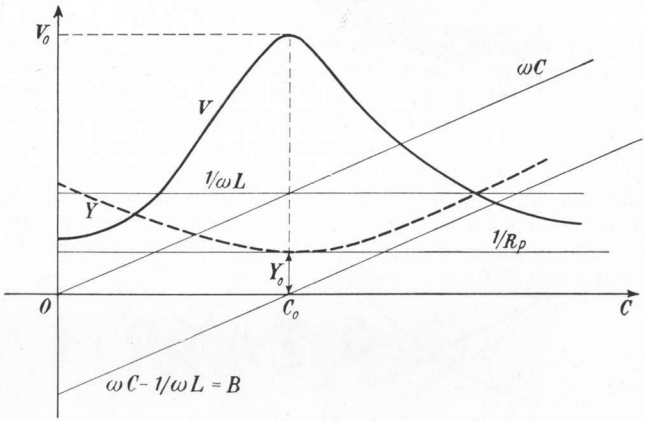


Fig. 39.5 – Costruzione della curva di risonanza relativa al circuito di Fig. 39.4

Infine la fig. 39.6 riporta un circuito risonante parallelo a variazione di induttanza. Il tracciamento della corri-

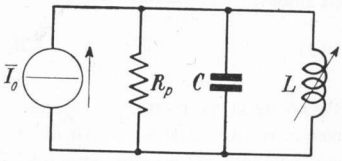


Fig. 39.6 – Circuito risonante parallelo a variazione di induttanza.

(1) Si determina pure:

39.14 $$\varepsilon = \frac{C_0}{C_0 - C'} \sqrt{\left(\frac{V_0}{V'}\right)^2 - 1}$$

e

39.15 $$\varepsilon = \frac{C' + C''}{C'' - C'} \sqrt{\left(\frac{V_0}{V'}\right)^2 - 1} ,$$

avendo i simboli usati il solito significato.

spondente curva di risonanza è stato eseguito in fig. 39.7. Per quest'ultimo circuito si ottiene:

39.16 $$L_0 = 2\,\frac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2}$$

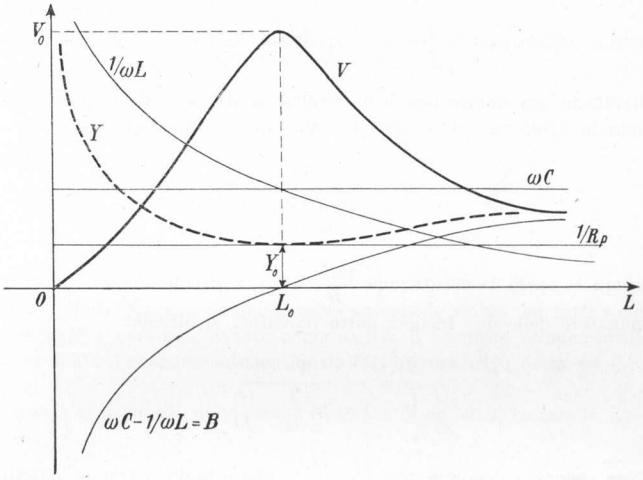


Fig. 39.7 – Costruzione della curva di risonanza relativa al circuito di fig. 39.6.

ed inoltre:

39.17 $$\varepsilon = \frac{L_1}{L_0 - L_1} = \frac{L_1 + L_2}{L_2 - L_1}\ (^1)\ .$$

40. – *Curva di risonanza universale.*

Ad ogni circuito oscillatorio serie o parallelo compete una propria curva di risonanza. Si può tuttavia tracciare una *curva di risonanza universale*, valida per tutti i circuiti risonanti, assumendo come variabili opportuni coefficienti adimensionali.

Per il circuito risonante serie sono valide le relazioni:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}_0}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

(1) Od anche:

39.18 $$\varepsilon = \frac{L'}{L_0 - L'}\sqrt{\left(\frac{V_0}{V'}\right)^2 - 1}$$

e

39.19 $$\varepsilon = \frac{L' + L''}{L'' - L'}\sqrt{\left(\frac{V_0}{V'}\right)^2 - 1}\ .$$

ed

$$I_0 = \frac{\overline{V}_0}{R}$$

che divise membro a membro danno:

$$\frac{\overline{I}}{\overline{I}_0} \quad \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} .$$

Dividendo ora numeratore e denominatore del secondo membro per R e ponendo in evidenza nel secondo termine del denominatore $\omega_0 L$:

$$\frac{\overline{I}}{\overline{I}_0} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega_0 L}{R}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} .$$

Se ora si opera la sostituzione $\dfrac{\omega_0 L}{R} = \varepsilon$ e si divide per 2π numeratore e denominatore delle due frazioni entro parentesi, si ottiene:

40.1 $$\frac{\overline{I}}{\overline{I}_0} = \frac{1}{1 + j\varepsilon\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)} .$$

L'espressione a denominatore $\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)$, che è tanto maggiore quanto più la frequenza f si scosta dalla frequenza di risonanza f_0 ed è di segno positivo o negativo secondo che f è maggiore o minore della f_0, si dice *dissonanza* χ:

40.2 $$\chi = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} .$$

La 40.1 diviene quindi:

40.3 $$\frac{\overline{I}}{\overline{I}_0} \quad \frac{1}{1 + j\varepsilon\chi} .$$

La 40.3 fornisce la relazione esistente (in modulo e fase) tra l'intensità di corrente generica $\overline{I}$ e la corrente di risonanza $\overline{I}_0$ per un dato valore della dissonanza χ in un circuito avente coefficiente di risonanza ε. Passando al valore assoluto ed alla fase del rapporto della 40.3 si ottiene:

40.4 $$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\chi^2}}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \varepsilon\chi .$$

L'angolo di fase φ dato dalla seconda delle 40.4 sarebbe a rigore l'angolo di fase tra $\overline{I}$ ed $\overline{I}_0$, ma si identifica con l'angolo di fase tra $\overline{I}$ e $\overline{V}_0$ in quanto la corrente di risonanza $\overline{I}_0$ è in fase con $\overline{V}_0$.

Espressioni analoghe alle 40.3 e 40.4 si possono ricavare per i circuiti risonanti parallelo, per i quali infatti si può scrivere:

$$\frac{\overline{V}}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 + jR_p(\omega C - 1/\omega L)}$$

da cui, ponendo in evidenza $\omega_0 C$ ed operando semplici sostituzioni, si ottiene:

40.5 $$\frac{\overline{V}}{\overline{V}_0} = \frac{1}{1 + j\varepsilon\chi}$$

e di conseguenza:

40.6 $$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\chi^2}}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \varepsilon\chi \ .$$

Si può quindi tracciare un'unica curva universale valida per tutti i circuiti risonanti serie e parallelo, avente come ascisse il prodotto adimensionale $\varepsilon\chi$ e come ordinate il rapporto adimensionale I/I_0 oppure V/V_0 ed anche l'angolo di fase φ.

La curva di risonanza universale è riportata in fig. 40.2, mentre in fig. 40.1

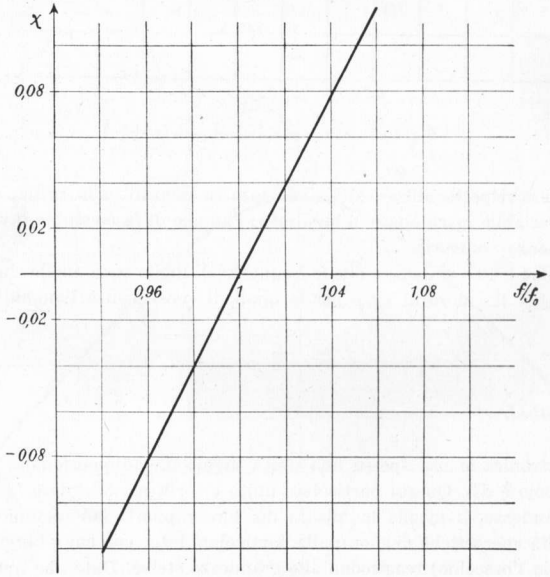


Fig. 40.1 – Valore della dissonanza in funzione di f/f_0.

è riportato un grafico che permette di determinare rapidamente il valore della dissonanza χ quando si conosca il rapporto f/f_0. Si noti che la curva di risonanza

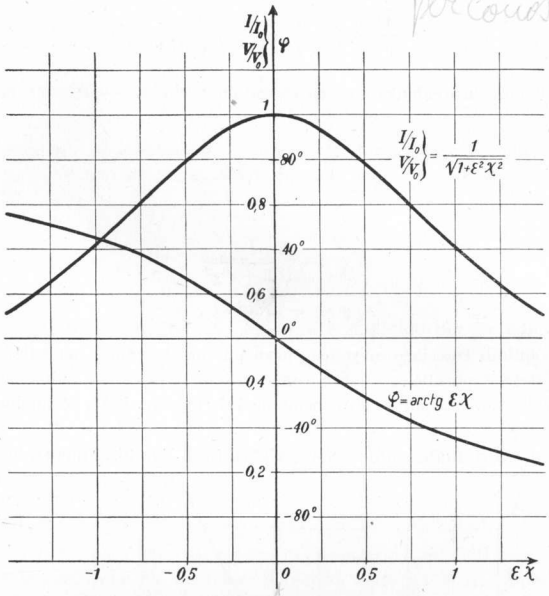


Fig. 40.2 – Curva di risonanza universale.

è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate in quanto nella prima delle 40.4 e 40.6 la variabile $\varepsilon\chi$ compare al quadrato; l'angolo di fase cambia invece segno per dissonanze contrarie.

Dalle 40.4 e 40.6 si deduce che le frequenze di taglio sono quelle che rendono uguale a ± 1 il valore di $\varepsilon\chi$ e per le quali di conseguenza l'angolo di fase è di $\mp 45°$.

41. – *Decibel.*

In elettronica si usa spesso una unità di misura adimensionale: il *decibel*, il cui simbolo è dB. Questa particolare unità è sorta per adeguare la misura di alcune grandezze, o meglio la misura dei loro rapporti (ad esempio rapporti tra intensità energetiche di suoni) alla particolare legge con cui gli organi umani (ad esempio l'orecchio) reagiscono alle grandezze stesse. Dato che quest'ultima è una legge di tipo logaritmico, particolarmente utile riesce il dB, che è appunto

una unità logaritmica. L'uso del dB è d'altra parte utile anche in campi non direttamente interessanti organi umani.

In un circuito di data resistenza la potenza che si dissipa dipende dal quadrato della intensità di corrente che la percorre o dal quadrato della tensione che vi è applicata. Si può assumere come potenza di riferimento un valore P_0 corrispondente ad una intensità I_0 o ad una tensione V_0. Sarà naturalmente $P_0 = RI_0^2$ oppure $P_0 = V_0^2/R_p$. Corrispondentemente ad un'altra intensità di corrente I o ad un'altra tensione V la potenza diverrà $P = RI^2$ oppure $P = V^2/R_p$. Se si esegue il rapporto P/P_0, se ne trova il logaritmo in base 10 ed infine lo si moltiplica per 10 si ottiene una grandezza adimensionale che si può denominare *livello* di P rispetto a P_0 e che è misurata in decibel. Cioè:

Tensione che varia rispetto alla tensione di risonanza

$$\text{livello } (P - P_0) = 10 \log \frac{P}{P_0} \text{ (dB)} .$$

Se ora si esprimono le potenze in funzione delle intensità di corrente o delle tensioni si ha:

$$10 \log \frac{P}{P_0} = 10 \log \frac{I^2}{I_0^2} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = 20 \log \frac{I}{I_0} \text{ (dB)}$$ è skalb

ed analogamente

$$10 \log \frac{P}{P_0} = 20 \log \frac{V}{V_0} \text{ (dB)} .$$

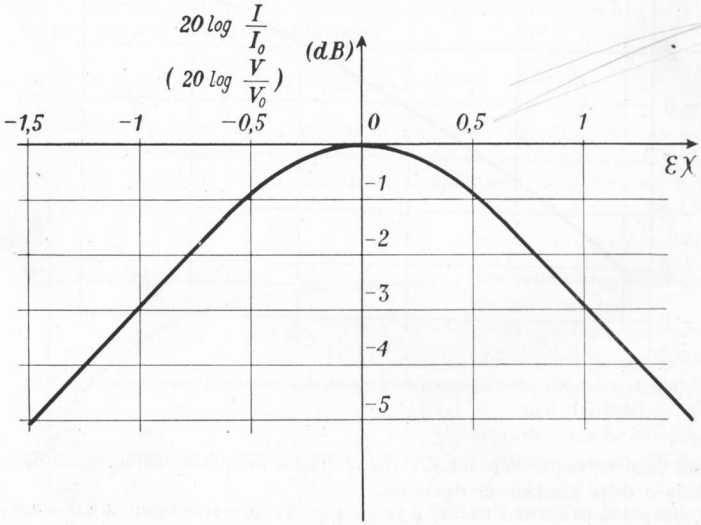


Fig. 41.1 – Curva di risonanza universale con le ordinate in *dB*.

Quindi per ottenere i dB occorre moltiplicare per 10 i logaritmi in base 10 dei rapporti tra potenze (oppure per 20 i logaritmi dei rapporti tra le correnti o le tensioni (a parità di resistenza).

Applicando questa unità di misura logaritmica alla curva di risonanza universale questa potrà essere rappresentata portando al solito in ascisse il coefficiente adimensione $\varepsilon\chi$ ed in ordinate $20 \log \frac{I}{I_0}$ oppure $20 \log \frac{V}{V_0}$.

In questo modo è rappresentata in fig. 41.1. Si noti che il *livello zero* corrisponde alla I_0 o alla V_0 e che invece le *frequenze di taglio* corrispondono ad un livello di -3 dB. Difatti si ha:

$$20 \log \frac{I_1}{I_0} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \log 0{,}707 = 20 \times \bar{1}{,}85 = -3 \text{ dB} .$$

Si può quindi definire *banda passante* di un circuito oscillatorio serie o parallelo quell'intervallo di frequenze per le quali il livello di intensità di corrente

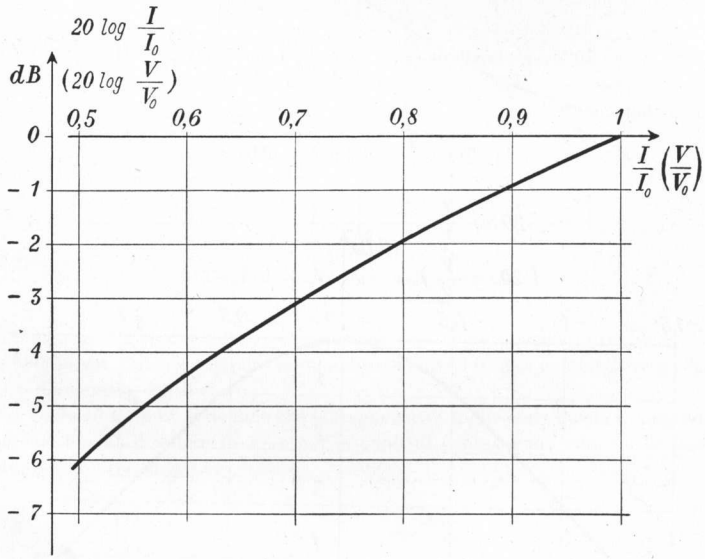


Fig. 41.2 – Curva per il passaggio dai rapporti di tensione o di corrente ai *dB* relativi.

o di tensione non scende più di 3 dB al disotto del livello dell'intensità di corrente o della tensione di risonanza.

La curva di fig. 41.2 facilita il passaggio dai rapporti di tensione o di corrente ai dB relativi.

CAPITOLO VI

RISPOSTA DI CIRCUITI *RC*, *RL* ED *RLC* A FORME D'ONDA NON SINUSOIDALI.

42. – *Circuito RC: risposta ad un gradino di tensione.*

Nel circuito *RC* di fig. 42.1 venga applicato, come tensione di ingresso v_e, un *gradino di tensione* di ampiezza V_0:

$$v_e = V_0 \cdot 1(t) \ .$$

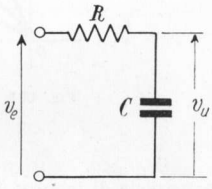


Fig. 42.1 – Circuito *RC*.

Si vuole determinare la tensione ai capi del condensatore che nel caso in esame rappresenta la risposta o tensione di uscita v_u. Dovrà essere naturalmente in ogni istante:

$$v_u + v_R = v_e$$

essendo v_R la tensione ai capi della resistenza. Ma poiché per $t \geq 0$ è $v_e \doteq V_0$, la relazione precedente si trasforma nella:

42.1 $$v_u + v_R = V_0 \ .$$

La 42.1 si identifica con la 26.1 riferita al circuito di fig. 26.1, essendo ora $v_u = v_C$. Dato che in entrambi i casi è la medesima la condizione iniziale (precisamente per $t = 0$ è $v_u = 0$) si può utilizzare direttamente la soluzione trovata con la 26.10, cioè

42.2 $$v_u = V_0(1 - e^{-t/RC}),$$

rappresentata graficamente dalla fig. 42.2.

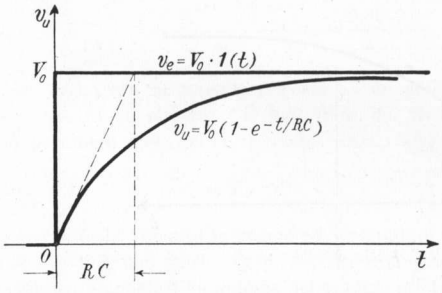


Fig. 42.2 – Risposta di un circuito *RC* ad un gradino di tensione.

Si possono applicare alla risposta v_u così determinata ed alla costante di tempo *RC* tutte le osservazioni già fatte a proposito del circuito di fig. 26.1. In particolare bisogna porre l'accento sul fatto che mentre in ingresso

al circuito si ha un gradino di tensione, in uscita la tensione ha un andamento esponenziale. Il circuito deforma quindi il gradino di tensione. La deformazione dipende dalla costante di tempo RC: essa sarebbe nulla per $RC = 0$, mentre va aumentando con l'aumento di RC. La fig. 42.3 illustra le risposte ad un gradino di tensione di ampiezza V_0 di circuiti a diversa costante di tempo. Mentre

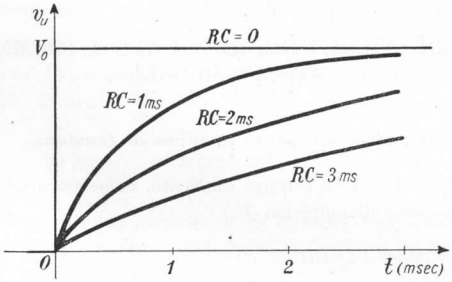


Fig. 42.3 – Risposta ad un gradino di tensione di circuiti RC a diversa costante di tempo.

la tensione di ingresso impiega un tempo nullo per passare dal valore zero al valore V_0, la tensione di uscita impiega per avvicinarsi al suo valore finale V_0 un tempo tanto minore quanto minore è la costante di tempo del circuito. Per questo motivo assume un importante significato il *tempo di salita* che ovviamente dipende dai parametri del circuito e quindi dalla costante di tempo.

Ricordando che il tempo di salita è il tempo impiegato dalla tensione di uscita v_u per passare dal 10% del valore finale al 90% del valore stesso, si indichi (fig. 42.4) con t_1 e t_2 gli istanti in cui si ha rispettivamente $v_u = 0{,}1\ V_0$ e $v_u = 0{,}9\ V_0$; il tempo di salita sarà $t_s = t_2 - t_1$. In base alla 42.2 dovranno

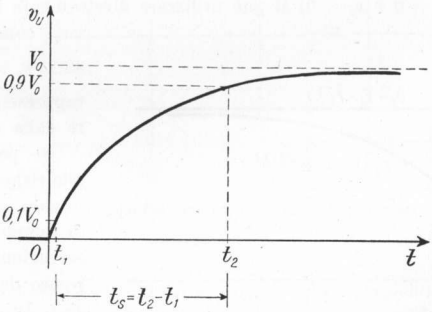


Fig. 42.4 – Determinazione del tempo di salita di un circuito RC.

essere verificate le seguenti eguaglianze:

42.3
$$0{,}1V_0 = V_0(1 - e^{-t_1/RC})$$
$$0{,}9V_0 = V_0(1 - e^{-t_2/RC})$$

dalle quali si ricava agevolmente:

$$e^{-t_1/RC} = 0{,}9$$
$$e^{-t_2/RC} = 0{,}1$$

ed eseguendo il rapporto membro a membro:

$$e^{(t_2 - t_1)/RC} = 9$$

da cui

$$t_s = t_2 - t_1 = \frac{\log 9}{\log e} RC$$

ed infine:

42.4
$$t_s = 2{,}2RC \ .$$

Si può anche porre il tempo di salita del circuito RC in funzione della frequenza di taglio superiore f_2 che il circuito stesso presenta in regime sinusoidale. È sufficiente a questo scopo ricavare la costante di tempo RC dalla 32.3:

$$RC = \frac{1}{2\pi f_2}$$

e sostituire il valore così trovato nella 42.4. Si ottiene:

$$t_s = 2{,}2 \frac{1}{2\pi f_2}$$

e semplificando le costanti:

42.5
$$t_s = \frac{0{,}35}{f_2} \ .$$

Si voglia ora ricavare la risposta ad un *gradino di tensione* dai capi della resistenza di un circuito CR (fig. 42.5). La risposta si può desumere dalla 26.11, essendo ora $v_u = v_R$:

42.6
$$v_u = V_0 e^{-t/RC} \ .$$

La risposta del circuito in esame ad un gradino di tensione è quindi una tensione esponenziale di ampiezza V_0 esattamente uguale all'ampiezza del gradino applicato in ingresso. Questa ampiezza viene raggiunta dalla tensione

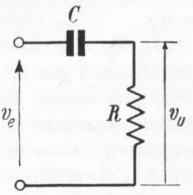


Fig. 42.5 – Circuito CR.

di uscita proprio nell'istante iniziale. Ciò significa che nell'istante iniziale il condensatore, ancora scarico, si comporta come se fosse un corto circuito. Successivamente, in seguito alla carica del condensatore ed al conseguente aumento di tensione ai suoi capi, la tensione di uscita decresce esponenzialmente fino a ridursi a zero allorché il condensatore è completamente carico e presenta ai suoi capi una d.d.p. pari a V_0. La fig. 42.6 rappresenta la tensione di ingresso v_e (gradino di tensione di ampiezza V_0) e la tensione di uscita v_u (esponenziale di ampiezza V_0) del circuito in esame.

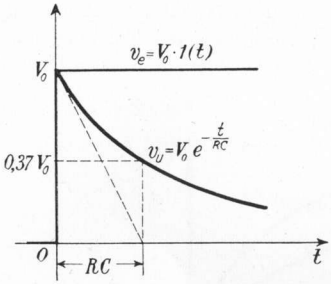


Fig. 42.6 – Risposta di un circuito *CR* ad un gradino di tensione.

Ogni circuito *CR* dà alla tensione gradino una risposta diversa (anche se la forma è sempre la stessa) dipendentemente dalla costante di tempo *RC*.

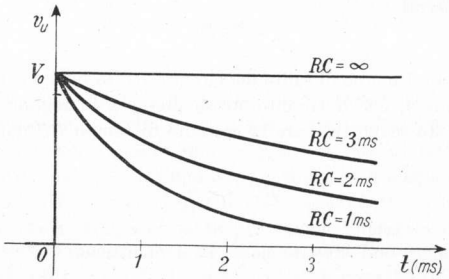


Fig. 42.7 – Risposta ad un gradino di tensione di circuiti *CR* a diversa costante di tempo.

La fig. 42.7 illustra le risposte ad una tensione gradino di ampiezza V_0 di circuiti a diversa costante di tempo. Si vede che la tensione di uscita si scosta tanto meno dalla tensione di ingresso quanto maggiore è la costante di tempo del circuito.

La risposta del circuito *RC* parallelo di fig. 42.8 ad un gradino di corrente di ampiezza I_0 si può facilmente ricavare trasformando mediante il teorema di Norton il circuito in esame nel circuito *RC* serie di figura 42.1, al cui ingresso venga applicato un gradino di tensione di ampiezza $V_0 = RI_0$.

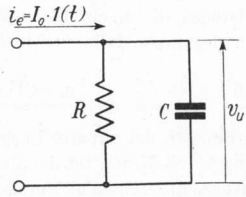


Fig. 42.8 – Circuito *RC* parallelo

43. – *Circuiti RC: risposta a forme d'onda rettangolari.*

Al circuito RC di fig. 42.1 venga applicato un *impulso rettangolare* di ampiezza V_0 e durata t_0 (fig. 43.1). Fino all'istante t_0 tutto si svolge come quando al circuito viene applicato un gradino di tensione di ampiezza V_0. All'istante t_0 sarà:

43.1 $(v_u)_{t=t_0} = V_0(1 - e^{-t_0/RC}) = V_0'$.

Successivamente, annullandosi la tensione di ingresso v_e, il circuito si identifica con quello di fig. 26.4 in cui avviene la scarica del condensatore (carico ora alla tensione V_0' data dalla 43.1) sulla resistenza. Utilizzando quindi l'espressione data dalla 26.19, dopo l'istante $t = t_0$ sarà:

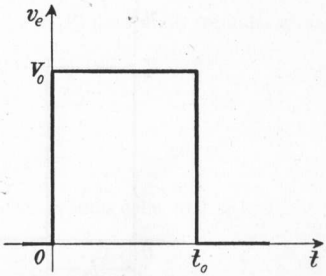


Fig. 43.1 – Impulso rettangolare.

43.2 $$v_u = V_0' e^{-(t-t_0)/RC} \quad \text{(valida per } t \geq t_0) \ .$$

Quindi dopo l'istante t_0 la tensione d'uscita è una funzione esponenziale decrescente ancora con la stessa costante di tempo RC e valore iniziale coincidente con il valore finale raggiunto all'istante t_0 (fig. 43.2).

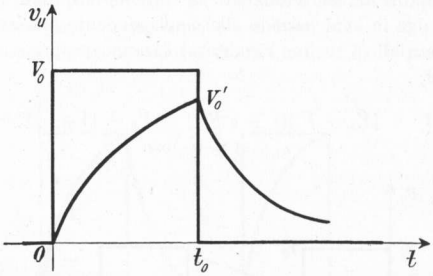


Fig. 43.2 – Risposta di un circuito RC ad un impulso rettangolare.

Una osservazione molto importante è la seguente. Dalla fig. 43.2 si rileva che l'impulso in uscita è tanto più simile all'impulso di ingresso rettangolare quanto minore è la costante di tempo RC del circuito, ossia quanto minore è il tempo di salita t_s. Inoltre a parità di tempo di salita risulta maggiormente deformato l'impulso di più breve durata t_0. Per ridurre al minimo tale deformazione occorre quindi che sia $t_s < t_0$. Può essere ad esempio sufficiente che sia $t_s = 0{,}35\, t_0$ il che si può realizzare, in base alla 42.5, facendo in modo che la

frequenza superiore di taglio f_2 sia uguale al reciproco della durata t_0 dell'impulso rettangolare. Deve essere invece $f_2 > 1/t_0$ qualora sia richiesta una maggiore fedeltà.

Sia ora applicata al circuito RC una *forma d'onda rettangolare periodica* di durata t_0 e periodo T (fig. 43.3). La forma d'onda d'uscita (o tensione ai capi

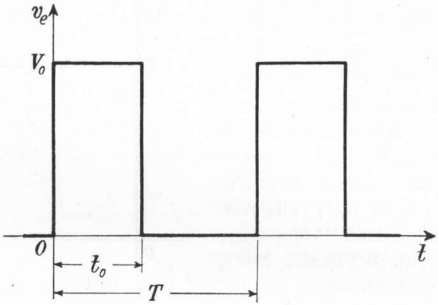


Fig. 43.3 – Forma d'onda rettangolare periodica.

del condensatore) sarà una successione di esponenziali crescenti e decrescenti. Dopo un primo intervallo di tempo (transitorio) in cui variano i valori iniziali e finali delle esponenziali, queste si svolgeranno tra due valori V' e V'' legati tra loro dalla condizione che l'aumento di tensione e quindi di carica del condensatore equivalga in ogni periodo alla corrispondente diminuzione (fig. 43.4). Poiché le esponenziali (a regime raggiunto) saranno rappresentate dai seguenti valori istantanei:

$$e_s = V' + (V_0 - V')(1 - e^{-t/RC}) = V_0 - (V_0 - V')e^{-t/RC} \; ;$$

$$e_d = V''e^{-(t-t_0)/RC}$$

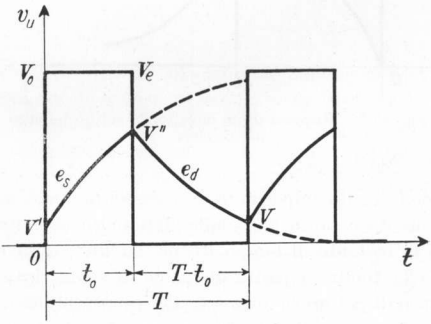


Fig. 43.4 – Risposta di un circuito RC ad una forma d'onda rettangolare periodica.

con riferimento ai valori finali si può scrivere:

43.3
$$V'' = V_0 - (V_0 - V')e^{-t_0/RC}$$
$$V' = V''e^{-(T-t_0)/RC} = V''\frac{e^{t_0/RC}}{e^{T/RC}}$$

e, sostituendo nella prima delle 43.3 il valore di V' dato dalla seconda, si ha:

43.4
$$V'' = V_0(1 - e^{-t_0/RC}) + V''e^{-T/RC}$$

da cui:

43.5
$$V'' = V_0\frac{1 - e^{-t_0/RC}}{1 - e^{-T/RC}}\,.$$

Sostituendo il valore di V'' così ricavato nella seconda delle 43.3 si ha:

43.6
$$V' = V_0\frac{e^{t_0/RC} - 1}{e^{T/RC} - 1}\,.$$

Se si calcola il valore medio della tensione di uscita v_u si trova:

43.7
$$V_{um} = \frac{1}{T}V_0t_0 \text{ (1)}\,.$$

Ma il valor medio così trovato coincide con il valor medio della tensione di ingresso come risulta evidente dall'esame della fig. 43.3. Si può concludere dicendo che la tensione d'uscita del circuito RC varia attorno ad un valor medio coincidente con il valor medio della tensione di ingresso.

La fig. 43.5 rappresenta la risposta di un circuito RC a piccola costante di

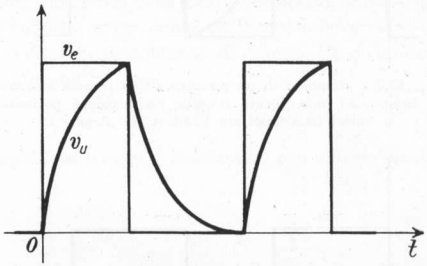


Fig. 43.5 – Risposta di un circuito RC a piccola costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

(1) Infatti risulta:

$$V_{um} = \frac{1}{T}\int_0^{t_0} e_s dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T-t_0} e_a d(t - t_0)\,.$$

Sostituendo le espressioni di e_s e di e_a, integrando, rendendo esplicite le V' e V'' per mezzo delle 43.5 e 43.6 e semplificando si giunge appunto alla 43.7.

tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica; mentre la fig. 43.6 indica la risposta, a regime raggiunto, alla stessa forma d'onda di un circuito *RC* a grande costante di tempo. Le figg. 43.7 e 43.8 presentano invece la risposta (sempre a regime raggiunto) di due circuiti *RC*, rispettivamente a piccola e grande costante di tempo, ad una forma d'onda rettangolare periodica a valori

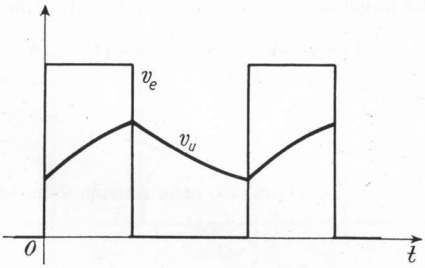


Fig. 43.6 – Risposta di un circuito *RC* a grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

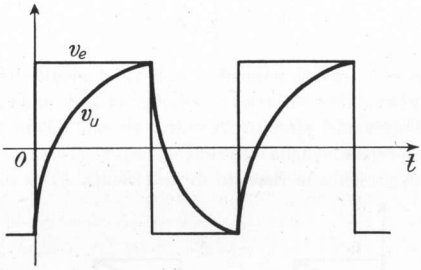


Fig. 43.7 – Risposta di un circuito *RC* a piccola costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica a valori istantanei sia positivi che negativi.

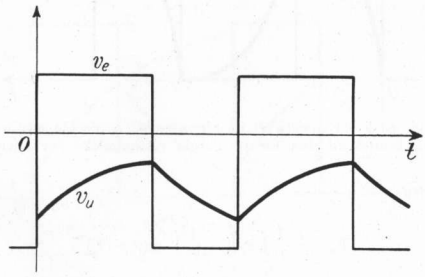


Fig. 43.8 – Risposta di un circuito *RC* a grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica a valori istantanei sia positivi che negativi.

istantanei sia positivi che negativi. In questi ultimi casi tutto si svolge come nei casi precedenti, tranne lo spostamento del valor medio della tensione d'uscita (sempre uguale al valor medio della tensione di ingresso) verso valori meno positivi (più negativi).

Fermando ancora l'attenzione su un circuito RC a grande costante di tempo si vede (fig. 43.9) che la risposta ad un impulso rettangolare si presenta appros-

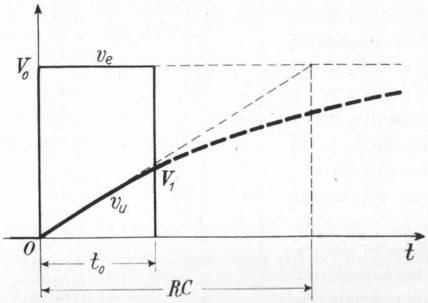


Fig. 43.9 – Integrazione effettuata da un circuito RC a grande costante di tempo.

simativamente rettilinea crescente ed inoltre si ricava facilmente (confondendo l'esponenziale con la sua tangente): $V_1 = \frac{1}{RC} V_0 t_0$, che, a parte il coefficiente $1/RC$ rappresenta l'integrale della funzione rettangolare. Si può concludere che il circuito si comporta quasi come un *circuito integratore* (e si dice appunto *quasi-integratore*) allorché la costante di tempo RC è molto più grande della durata t_0 dell'impulso [1].

---

[1] Più in generale per il circuito assegnato si può scrivere (qualunque sia la tensione di ingresso):

$$v_e = RC \frac{dv_u}{dt} + v_u \ .$$

Se la RC è molto grande si può ritenere trascurabile la v_u per cui la corrente nel circuito dipende quasi unicamente dalla resistenza: $i = v_e/R$. Di conseguenza risulta:

$$v_u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_e}{R} dt = \frac{1}{RC} \int_0^t v_e dt$$

da cui appare che (a parte la costante RC) la tensione d'uscita integra la tensione d'ingresso.

Per determinare punto per punto l'andamento della risposta di un circuito RC riesce utile l'uso della tabella a fianco e della curva corrispondente (fig. 43.10) in cui sono riportate in funzione della variabile indipendente adimensionale $x = t/RC$ le variabili dipendenti adimensionali $y_d = v/V_h = e^{-x}$ oppure $y_s = v/V_h = 1 - e^{-x}$, riferentisi la prima ad una curva esponenziale decrescente e la seconda ad una curva esponenziale crescente (per qualunque valore di x risulta $y_d + y_s = 1$). V_h rappresenta il salto di tensione tra i valori tra i quali tende a svolgersi l'esponenziale crescente o decrescente.

TAB.: *della funzione esponenziale crescente e decrescente.*

$x = t/RC$	$y_a = e^{-x}$	$y_s = 1 - e^{-x}$
0,1	0,9	0,1
0,2	0,82	0,18
0,3	0,74	0,26
0,4	0,67	0,33
0,5	0,61	0,39
0,6	0,55	0,45
0,7	0,496	0,504
0,8	0,45	0,55
0,9	0,407	0,593
1	0,37	0,63
1,25	0,287	0,713
1,5	0,224	0,776
1,75	0,174	0,826
2	0,138	0,862
2,25	0,106	0,894
2,5	0,083	0,917
2,75	0,0646	0,9354
3	0,0508	0,9492
3,5	0,0309	0,9691
4	0,0186	0,9814
5	0,0069	0,9931
6	0,00257	0,99743
7	0,000955	0,999045

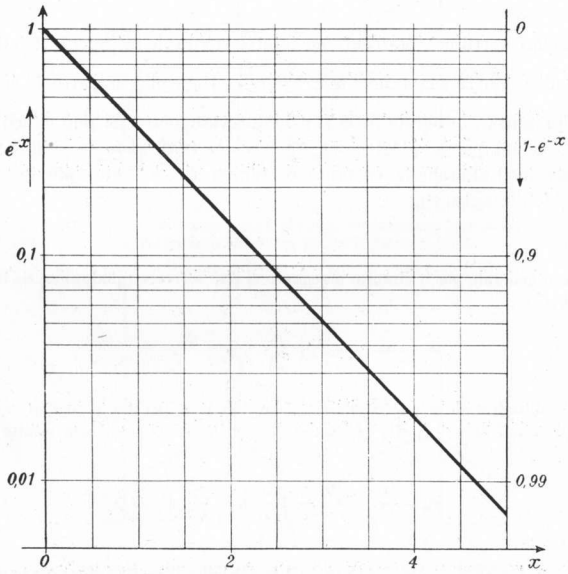


Fig. 43.10 – Diagramma delle funzioni e^{-x} ed $1 - e^{-x}$.

La risposta del circuito CR alla forma d'onda rettangolare è complementare alla risposta del circuito RC.

Per quanto riguarda l'*impulso rettangolare*, fino all'istante t_0 l'andamento è ancora quello rappresentato in fig. 42.6. All'istante $t = t_0$ sarà:

43.8 $$(v_u)_{t=t_0} = V_0 e^{-t_0/LC}$$

ed annullandosi poi istantaneamente la tensione di ingresso risulterà: $v_R = - v_C$ e quindi, in base alla 43.2:

43.9 $$v_u = - V_0' e^{-(t-t_0)/RC} ,$$

il valore di V_0' essendo dato dalla 43.1. All'istante t_0 la tensione di uscita subisce una variazione istantanea di ampiezza

$$- V_0(1 - e^{-t_0/RC}) - V_0 e^{-t_0/RC} = - V_0$$

ossia risente interamente il gradino negativo della tensione di ingresso. La fig. 43.11 rappresenta la risposta del circuito CR ad un impulso rettangolare.

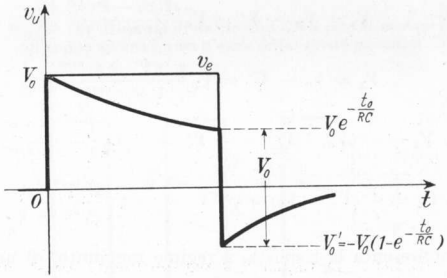


Fig. 43.11 – Risposta di un circuito CR ad un impulso rettangolare.

È evidente che la deformazione tra ingresso ed uscita è tanto minore quanto maggiore è la costante di tempo RC del circuito nei confronti della durata t_0 dell'impulso.

Da notare, sempre nella medesima figura, che l'area positiva determinata dalla forma d'onda eguaglia l'area negativa come si può constatare facilmente integrando la 42.6 tra 0 e t_0 e la 43.9 tra t_0 e ∞. Ciò è una conseguenza della presenza tra ingresso ed uscita del condensatore ai cui capi si stabilisce il valor medio della tensione di ingresso.

Sia ora applicata al circuito CR una *forma d'onda rettangolare periodica* di durata t_0 e periodo T. La forma d'onda d'uscita sarà una successione di esponenziali decrescenti di segno alternativamente contrario durante la durata di un impulso e durante l'intervallo tra due impulsi successivi. Dopo un primo intervallo di tempo (transitorio) in cui variano i valori iniziali e finali delle

esponenziali (pur rimanendo sempre uguale a V_0 il salto tra il termine di una esponenziale e l'inizio di quella successiva di segno contrario), queste si svolgeranno rispettivamente tra i valori V_1 e V_2 e $V_3 = -(V_0 - V_2)$ e $V_4 = -(V_0 - V_1)$ legati tra loro dalla condizione che in ogni periodo l'area positiva uguagli quella negativa (fig. 43.12).

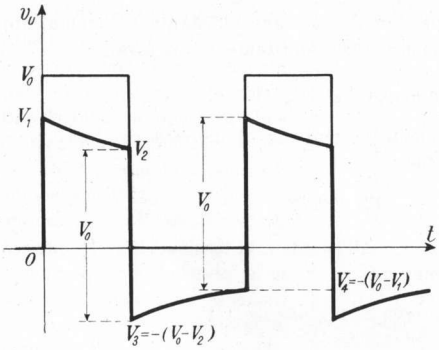


Fig. 43.12 – Risposta di un circuito CR ad una forma d'onda rettangolare periodica.

Confrontando tra loro la fig. 43.4 e la fig. 43.12, per la complementarietà esistente tra le due curve, usufruendo delle 43.5 e 43.6 si potrà scrivere:

$$V_1 = V_0 - V' = V_0 \frac{e^{T/RC} - e^{t_0/RC}}{e^{T/RC} - 1}$$

$$V_2 = V_0 - V'' = V_0 \frac{e^{-t_0/RC} - e^{-T/RC}}{1 - e^{-T/RC}}$$

43.10

$$V_3 = -(V_0 - V_2) = -V'' = -V_0 \frac{1 - e^{-t_0/RC}}{1 - e^{-T/RC}}$$

$$V_4 = -(V_0 - V_1) = -V' = -V_0 \frac{e^{t_0/RC} - 1}{e^{T/RC} - 1}.$$

La fig. 43.13 rappresenta la risposta, a regime raggiunto, di un circuito CR a

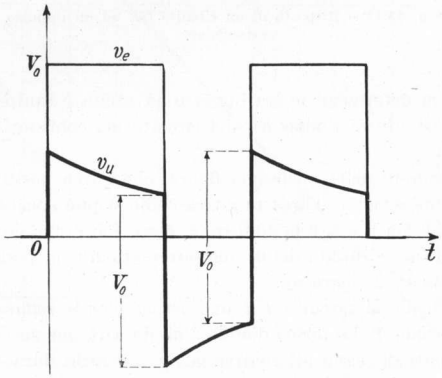


Fig. 43.13 – Risposta di un circuito CR a grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica, mentre la fig. 43.14 indica la risposta alla stessa forma d'onda di un circuito CR a piccola costante di tempo. Infine la fig. 43.15 dà la risposta di un circuito CR a

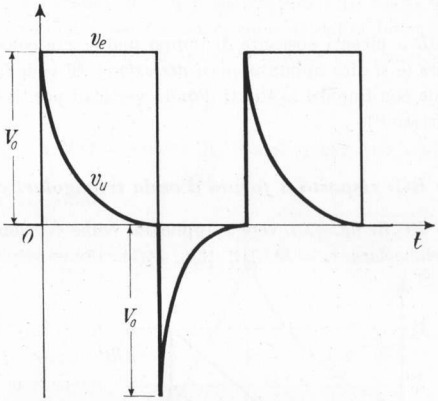


Fig. 43.14 – Risposta di un circuito CR a piccola costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

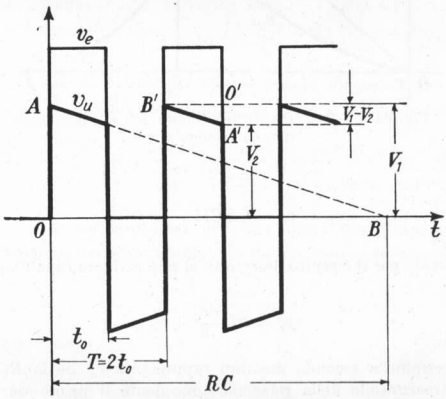


Fig. 43.15 – Risposta di un circuito CR a grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare simmetrica ($T = 2t_0$).

grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare simmetrica ($T=2t_0$). Da essa si ricava che la caduta percentuale è data da:

43.11 $$\frac{V_1 - V_2}{V_1} 100 \simeq \frac{t_0}{RC} 100 = \frac{T}{2RC} 100 = \frac{1}{2RCf} 100$$

ed essendo $1/2\pi RC = f_1$ (frequenza inferiore di taglio) e quindi $1/2RC = \pi f_1$, si ottiene:

43.12 $$\frac{V_1 - V_2}{V_1} 100 \simeq 100\pi f_1/f \ .$$

Il circuito CR a piccola costante di tempo può essere considerato come un *circuito derivatore* (e si dice appunto *quasi-derivatore*). Si vede infatti (fig. 43.14) che esso risponde con impulsi ai fronti d'onda verticali positivi o negativi della tensione di ingresso (1).

44. – *Circuito RC: risposta a forme d'onda triangolari ed esponenziali.*

Nel circuito RC di fig. 42.1 venga applicata, come tensione di ingresso v_e, una *tensione triangolare* $v_e = kt \cdot 1(t)$ (fig. 44.1). Come risposta del circuito

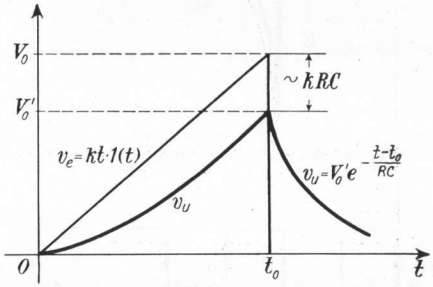


Fig. 44.1 – Risposta di un circuito RC ad una forma d'onda triangolare.

si trova (2):

44.9 $$v_u = v_e - kRC(1 - e^{-t/RC}) \ ;$$

---

(1) Più in generale per il circuito assegnato si può scrivere (qualunque sia la tensione di ingresso):

$$v_e = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

in cui il primo termine a secondo membro rappresenta v_u. Se la RC è molto piccola si può ritenere trascurabile nella relazione precedente il primo termine del secondo membro. Risulta quindi $v_e \simeq v_C$ e di conseguenza:

$$v_u = RC \frac{dv_C}{dt} = RC \frac{dv_e}{dt}$$

da cui appare che (a parte la costante RC) la tensione d'uscita deriva la tensione d'ingresso.

(2) Dovendo infatti anche ora essere verificata in ogni istante l'uguaglianza $v_e = v_R + v_u$ si deve scrivere:

44.1 $$kt = RC \frac{dv_u}{dt} + v_u$$

ossia la risposta del circuito RC ad una tensione di ingresso triangolare è una tensione identica a quella di ingresso, da cui però viene in ogni istante detratta l'esponenziale crescente $KRC(1 - e^{-t/RC})$. Per $t \gg RC$ la v_u si può considerare rettilinea, all'incirca parallela alla v_e e spostata di kRC verso valori più bassi (fig. 44.1). Dopo l'istante t_0 (in cui ha termine la salita lineare della tensione triangolare di ingresso) la tensione di uscita assume l'andamento esponenziale:

$$v_u = V_0' e^{-(t-t_0)/RC}$$

essendo $V_0' = V_0 - kRC(1 - e^{-t_0/RC})$ il valore raggiunto dalla tensione di uscita all'istante t_0.

Al circuito RC sia applicato un *impulso* a salita lineare ed a discesa esponenziale (fig. 44.2). Sia V_0 il valor massimo dell'impulso, t_0 la durata del fronte di salita lineare e τ la costante di tempo della discesa esponenziale. Si indichi con V_1 il valore raggiunto dalla v_u dopo il tempo t_0, valore che si può facilmente calcolare in base alla 44.9 ponendo $t = t_0$, $v_e = V_0$ e $k = V_0/t_0$. Se si contano i tempi per la discesa esponenziale a partire dall'istante t_0, in base alla eguaglianza $v_e = v_R + v_u$, si potrà scrivere:

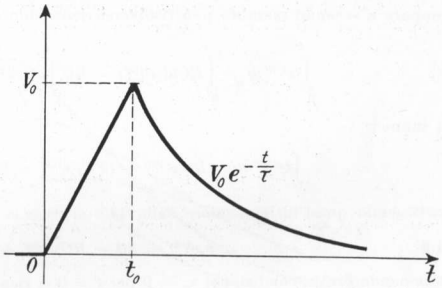


Fig. 44.2 – Impulso.

44.10 $$V_0 e^{-t/\tau} = RC \frac{dv_u}{dt} + v_u \, .$$

Possono verificarsi i due seguenti casi: $RC = \tau$, ossia eguaglianza tra la costante di tempo del decadimento esponenziale e la costante di tempo del circuito, oppure $RC \neq \tau$.

---

che si può trasformare nella:

44.2 $$\frac{dv_u}{dt} + \frac{1}{RC} v_u = \frac{k}{RC} t \, .$$

Moltiplicando ambo i membri della 44.2 per $e^{t/CR}$ si ottiene

44.3 $$\frac{dv_u}{dt} e^{t/RC} + \frac{1}{RC} v_u e^{t/RC} = \frac{k}{RC} t e^{t/RC}$$

ed essendo il primo membro la derivata rispetto al tempo dell'espressione $v_u e^{t/RC}$, si può scrivere:

44.4 $$\frac{d}{dt}(v_u e^{t/RC}) = \frac{k}{RC} t e^{t/RC}$$

Nel primo caso la risposta del circuito risulta [1]:

44.13 $$v_u = \left(V_1 + V_0 \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} .$$

---

ed integrando

44.5 $$v_u e^{t/RC} = \frac{k}{RC} \int_0^t t e^{t/RC} dt + h$$

dove h è una costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali. L'integrale che compare a secondo membro può risolversi ricorrendo all'integrazione per parti che dà:

$$\int_0^t t e^{t/RC} dt = \int_0^t RCt d(e^{t/RC}) = RC \int_0^t d(te^{t/RC}) - RC \int_0^t e^{t/RC} dt$$

ed infine

$$\int t e^{t/RC} dt = RCte^{t/RC} - (RC)^2 e^{t/RC} = RC(t - RC)^{t/RC} .$$

Sostituendo quest'ultimo valore nella 44.5 si ricava:

44.6 $$v_u e^{t/RC} = k(t - RC)e^{t/RC} + h .$$

Imponendo ora la condizione: $v_u = 0$ per $t = 0$ si ricava il valore di h:

44.7 $$h = kRC$$

e quindi

44.8 $$v_u = kt - kRC(1 - e^{-t/RC})$$

equivalente alla 44.9.

[1] Ponendo $RC = \tau$ la 44.10 diviene:

44.11 $$V_0 e^{-t/\tau} = \tau \frac{dv_u}{dt} + v_u$$

ed anche

$$\frac{V_0}{\tau} = \frac{dv_u}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} v_u e^{t/\tau}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{d}{dt}(v_u e^{t/\tau}) = V_0/\tau$$

ed integrando

44.12 $$v_u e^{t/\tau} = \frac{V_0}{\tau} t + h$$

dove h è determinabile imponendo la condizione che, per $t = 0$, $v_u = V_1$. Da questa condizione si ricava $h = V_1$, e sostituendo questo valore nella 44.12 si ha:

$$v_u = V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} + V_1 e^{-t/\tau}$$

da cui infine si ricava la 44.13.

Nel secondo caso invece la risposta del circuito risulta [1]:

44.17 $$v_u = V_1 e^{-t/RC} + \frac{V_0}{1 - \frac{RC}{\tau}} (e^{-t/\tau} - e^{-t/RC}) .$$

La fig. 44.3 rappresenta (in coordinate adimensionali t/τ, v_e/V_0 e v_u/V_0)

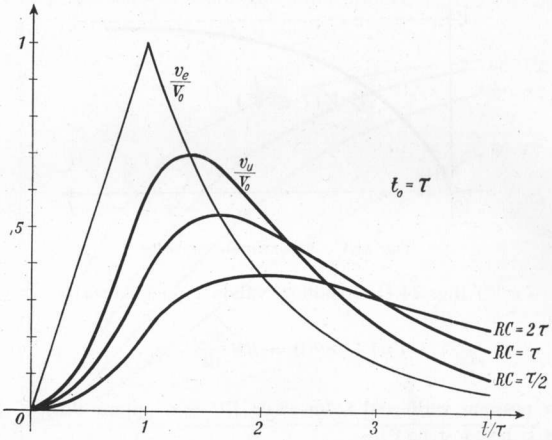


Fig. 44.3 – Risposta ad un impulso di circuiti RC a diversa costante di tempo.

un impulso con salita di durata $t_0 = \tau$, essendo τ la costante di tempo della discesa esponenziale, e rappresenta anche la risposta a tale impulso di tre cir-

---

[1] In questo caso infatti la 44.10 si risolverà determinando l'integrale dell'equazione omogenea associata, quindi un integrale particolare dell'equazione in esame e addizionando tra loro i valori così trovati.

L'equazione omogenea associata della 44.10 è la seguente:

$$\frac{dv_u}{dt} + \frac{1}{RC} v_u = 0$$

che si trasforma nella

$$\frac{dv_u}{v_u} = - dt/RC$$

che integrata dà

$$lnv_u = - \frac{t}{RC} + lnh$$

ed infine

44.14 $$v_u = he^{-t/RC} .$$

Si può ora ricercare un integrale particolare della 44.10 ponendo $v_u = me^{\alpha t}$ e quindi $dv_u/dt = m\alpha e^{\alpha t}$ e sostituendo questi valori nella 44.10. Si ottiene:

$$V_0 e^{-t/\tau} = RCm\alpha e^{\alpha t} + me^{\alpha t}$$

cuiti RC, aventi costante di tempo rispettivamente uguale, doppia e metà della costante τ.

Un altro caso che interessa considerare è quello della risposta del circuito RC allorché la tensione di ingresso è costituita da una *esponenziale crescente*

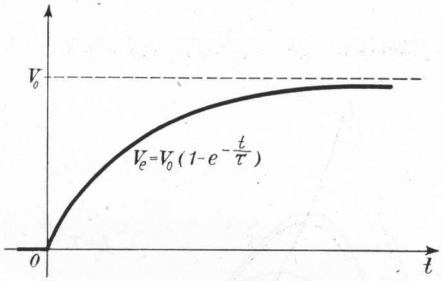


Fig. 44.4 – Esponenziale crescente.

$v_e = V_0(1 - e^{-t/\tau})$ (fig. 44.4). Risulterà valida l'uguaglianza:

44.18 $$V_0(1 - e^{-t/\tau}) = RC\frac{dv_u}{dt} + v_u \,.$$

Anche ora possono verificarsi i due casi: $RC = \tau$, oppure $RC \neq \tau$. Nel primo caso come risposta si ha [1]:

44.19 $$v_u = v_e - V_0\frac{t}{\tau}e^{-t/\tau} \,.$$

---

e ponendo in evidenza $e^{\alpha t}$:

$$V_0 e^{-t/\tau} = (RC\alpha + 1)me^{\alpha t}$$

che risulta verificata per $\alpha = -1/\tau$ e per $m = \dfrac{V_0}{RC\alpha + 1} = \dfrac{V_0}{1 - RC/\tau}$ e quindi

44.15 $$v_u = \frac{V_0}{1 - RC/\tau}e^{-t/\tau} \,.$$

La soluzione della 44.10 sarà quindi la somma della 44.14 e della 44.15, ossia:

44.16 $$v_u = he^{-t/RC} + \frac{V_0}{1 - RC/\tau}e^{-t/\tau} \,.$$

Imponendo che per $t = 0$ deve essere $v_u = V_1$ si ricava:

$$h = V_1 - \frac{V_0}{1 - RC/\tau}$$

che sostituito nella 44.16 dà la 44.17.

[1] Infatti la 44.18 si trasforma nella:

$$V_0(1 - e^{-t/\tau}) = \tau\frac{dv_u}{dt} + v_u$$

Se invece è $RC \neq \tau$, la risposta del circuito risulta [1]:

44.23 $$v_u = v_e + V_0 \frac{\frac{RC}{\tau}}{\frac{RC}{\tau} - 1} (e^{-t/\tau} - e^{-t/RC}) .$$

La fig. 44.5 rappresenta in coordinate adimensionali t/τ, v_e/V_0 e v_u/V_0 la ten-

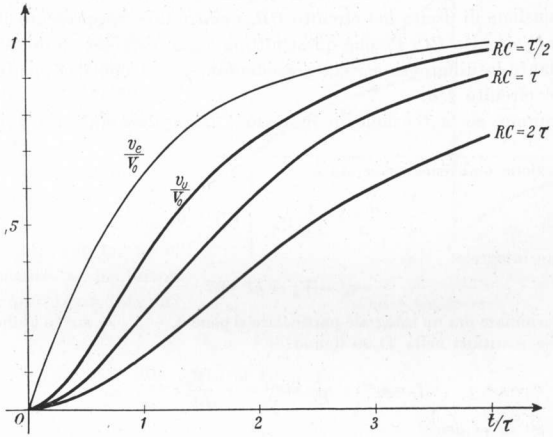


Fig. 44.5 – Risposta ad una esponenziale crescente di circuiti RC a diversa costante di tempo.

---

che può essere scritta

$$- V_0 e^{-t/\tau} = \tau \frac{dv_u}{dt} + (v_u - V_0)$$

ed anche

$$\frac{d(v_u - V_0)}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} (v_u - V_0) e^{t/\tau} = - V_0/\tau$$

semplificabile nella

$$\frac{d}{dt} [(v_u - V_0) e^{t/\tau}] = - V_0/\tau$$

che integrata diviene:

$$(v_u - V_0) e^{t/\tau} = - \frac{V_0}{\tau} t + h$$

dove h, in base alla condizione iniziale ($t = 0$, $v_u = 0$), diviene uguale a $-V_0$. Risulta quindi:

$$v_u - V_0 = - \frac{V_0}{\tau} t e^{-t/\tau} - V_0 e^{-t/\tau}$$

da cui

$$v_u = V_0 - V_0 e^{-t/\tau} - V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} = V_0 (1 - e^{-t/\tau}) - V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

equivalente alla 44.19.

[1] Infatti in tal caso la 44.18 diviene:

44.20 $$\frac{dv_u}{dt} + \frac{1}{RC} (v_u - V_0) = - \frac{V_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

sione di ingresso esponenziale di costante di tempo τ e la risposta a tale tensione di tre circuiti RC di costante di tempo rispettivamente uguale, doppia metà della costante τ.

Note le risposte del circuito RC alle diverse forme d'onda, si possono abbastanza facilmente determinare le risposte alle medesime forme d'onda di circuiti CR. Difatti per un generico circuito comprendente resistenza e capacità si può scrivere: $v_e = v_R + v_C$, da cui si ricava $v_R = v_e - v_C$. Ora la v_R rappresenta la tensione di uscita nel circuito CR, mentre la v_C rappresenta la tensione di uscita nel circuito RC. Poiché quest'ultima è già stata determinata per i vari casi, mediante la differenza scritta precedentemente si può facilmente giungere alla v_u del circuito CR.

Ad esempio, se la tensione di ingresso è *triangolare*, in base alla 44.9, ri-

---

la cui equazione omogenea associata è

$$\frac{dv_u}{dt} + \frac{1}{RC}(v_u - V_0) = 0$$

avente come integrale:

44.21 $$v_u - V_0 = he^{-t/RC} .$$

Per determinare ora un integrale particolare si pone $v_u - V_0 = me^{\alpha t}$ e quindi $dv_u/dt = m\alpha e^{\alpha t}$ che sostituiti nella 44.20 danno:

$$m\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC} me^{\alpha t} = -\frac{V_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

e ponendo $e^{\alpha t}$ in evidenza

$$m(\alpha + 1/RC)e^{\alpha t} = -\frac{V_0}{RC} e^{-t/\tau}$$

che risulta verificata per $\alpha = -1/\tau$ ed $m(\alpha + 1/RC) = -V_0/RC$ ed anche $m(1/RC - 1/\tau) = -V_0/RC$ ossia $\dfrac{V_0}{\dfrac{RC}{\tau} - 1} = m$. L'integrale particolare risulta quindi:

44.22 $$v_u - V_0 = \frac{V_0}{RC/\tau - 1} e^{-t/\tau} .$$

La soluzione della 44.20 sarà quindi la somma della 44.21 e della 44.22 ossia

$$v_u - V_0 = he^{-t/RC} + \frac{V_0}{RC/\tau - 1} e^{-t/\tau} .$$

Poiché per $t = 0$ è $v_u = 0$ dall'equazione precedente si ricava $h = -V_0 \dfrac{RC/\tau}{RC/\tau - 1}$.
L'equazione precedente diviene quindi:

$$v_u - V_0 = -V_0 \frac{RC/\tau}{RC/\tau - 1} e^{-t/RC} + V_0 \frac{1}{RC/\tau - 1} e^{-t/\tau}$$

che si può anche scrivere, aggiungendo e togliendo $V_0 e^{-t/\tau}$,

$$v_u = V_0 - V_0 e^{-t/\tau} + V_0 e^{-t/\tau} - V_0 \frac{RC/\tau}{RC/\tau - 1} e^{-t/RC} + V_0 \frac{1}{RC/\tau - 1} e^{-t/\tau}$$

da cui infine si ricava la 44.23.

sulta ora:

44.24 $$v_u = kRC(1 - e^{-t/RC}) \ .$$

La precedente relazione è valida fino all'istante t_0. Successivamente invece è valida la relazione:

$$v_u = - V'_0 e^{-(t-t_0)/RC}$$

essendo V'_0 la tensione ai capi del condensatore all'istante t_0. In fig. 44.6 è appunto indicata la risposta di un circuito CR ad una tensione triangolare.

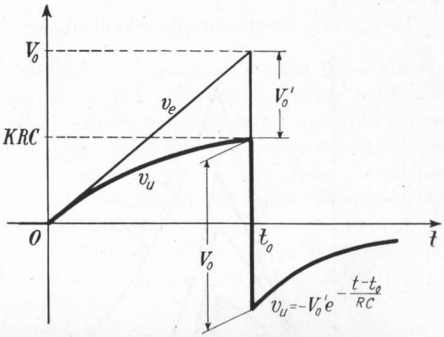


Fig. 44.6 – Risposta di un circuito CR ad una forma d'onda triangolare.

Se poi la forma d'onda in ingresso è un *impulso* a salita lineare ed a discesa esponenziale di costante di tempo τ, dopo l'istante t_0 la forma d'onda in uscita sarà data da:

44.25 $$v_u = V_0 e^{-t/\tau} - v_C \ .$$

Se è $\tau = RC$, in base alla 44.13 si ricava:

$$v_u = (V_0 - V_1 - V_0 \cdot t/\tau) e^{-t/\tau}$$

nella quale V_1 è la tensione ai capi del condensatore nell'istante t_0. Quindi $V_0 - V_1 = V'$ sarà la tensione di uscita all'istante t_0. Si potrà quindi scrivere:

44.26 $$v_u = (V' - V_0 \cdot t/\tau) e^{-t/\tau} \ .$$

Se è invece $\tau \neq RC$ sostituendo nella 44.25 il valore dato dalla 44.17 si ottiene:

$$v_u = V_0 e^{-t/\tau} - V_1 e^{-t/RC} - \frac{V_0}{1 - RC/\tau} e^{-t/\tau} + \frac{V_0}{1 - RC/\tau} e^{-t/RC}$$

che semplificata dà:

44.27 $$v_u = V' e^{-t/RC} - V_0 \frac{RC/\tau}{1 - RC/\tau} (e^{-t/\tau} + e^{-t/RC})$$

avendo ancora posto $V' = V_0 - V_1$ (V' = tensione ai capi della resistenza all'istante t_0 e V_1 tensione ai capi del condensatore al medesimo istante$_u$.

La fig. 44.7 rappresenta (in coordinate t/τ, v_e/V_0 e v_u/V_0) un impulso con salita $t_0 = \tau$, essendo τ la costante di tempo della discesa esponenziale, e rappresenta anche la risposta a tale impulso di tre circuiti CR, aventi costante di tempo RC rispettivamente uguale, doppia e metà della costante τ.

Se infine la tensione di ingresso v_e è una *esponenziale crescente*: $v_e = V_0 (1 - e^{-t/\tau})$ la tensione in uscita risulta (in base alla 44.19):

44.28 $$v_u = V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

se la costante di tempo del circuito è uguale a τ; ed invece (in base alla 44.23):

44.29 $$v_u = V_0 \frac{RC/\tau}{RC/\tau - 1} (e^{-t/RC} - e^{-t/\tau})$$

se è $RC \neq \tau$.

La fig. 44.8 rappresenta (in coordinate t/τ, v_e/V_0 e v_u/V_0) la tensione di in-

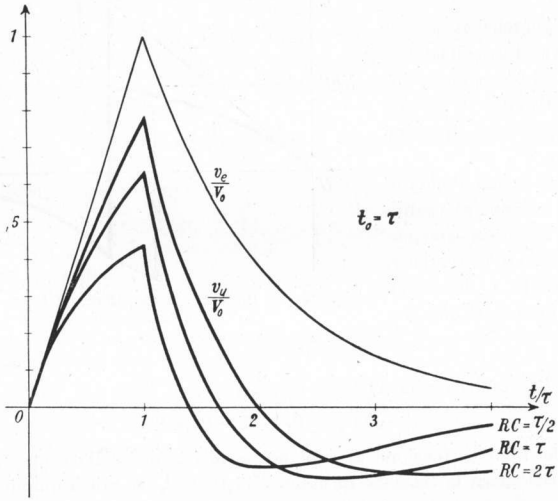


Fig. 44.7 – Risposta ad un impulso di circuiti CR a diversa costante di tempo.

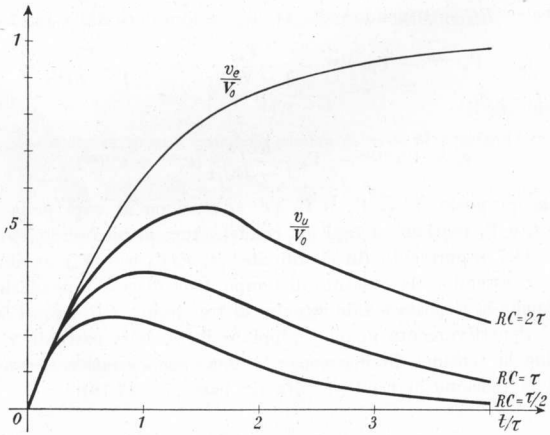


Fig. 44.8 – Risposta ad una esponenziale crescente di circuiti CR a diversa costante di tempo.

gresso esponenziale di costante di tempo τ e la risposta a tale tensione di tre circuiti CR di costante di tempo rispettivamente uguale, doppia e metà della costante τ.

45. – *Partitori compensati.*

Nei paragrafi precedenti esaminando la risposta di circuiti RC e CR si è constatato come la tensione ai capi del condensatore tenda a seguire con ritardo le variazioni di tensione imposte al circuito. In particolare si può dire che nel caso di una brusca variazione della tensione di ingresso, come anche alla apertura e chiusura di un interruttore, nell'istante in cui ciò avviene il condensatore si comporta come un corto circuito, mentre dopo un tempo sufficientemente elevato il condensatore, raggiunto il valore finale di tensione impostogli dal generatore e dagli altri elementi circuitali, si comporta come un tratto di circuito di resistenza infinita. Applicando questa semplice regola molto spesso si possono scrivere con relativa facilità le espressioni dell'andamento delle tensioni ai capi degli elementi del circuito in esame successivamente all'istante in cui avviene la variazione brusca.

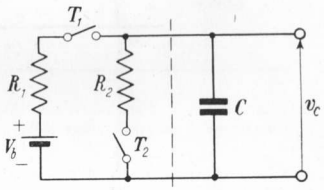


Fig. 45.1 – Circuito con resistenze e capacità soggetto a transitori.

Come esempio si consideri il circuito di fig. 45.1. Inizialmente siano aperti entrambi gli interruttori T_1 e T_2; la tensione v_C è nulla come pure le tensioni v_1 e v_2 ai capi delle resistenze R_1 ed R_2. All'istante $t = 0$ si chiuda l'interruttore T_1. Il circuito si chiude attraverso il generatore, la resistenza R_1 ed il condensatore C. Si avrà: $(v_C)_{t=0} = 0$ e $(v_1)_{t=0} = V_b$. Successivamente con costante di tempo R_1C il condensatore si carica mentre la v_1 va diminuendo. Dopo un numero sufficiente di costanti di tempo (teoricamente dopo un tempo infinito) il condensatore si sarà completamente caricato e si avrà $(v_C)_\infty = V_b$ e $(v_1)_\infty = 0$. Se nell'istante t_1 (successivo al periodo transitorio) viene chiuso anche l'interruttore T_2, il circuito in esame si comporta come quello equivalente rappresentato in fig. 45.2 ricavato applicando il teorema di Thèvenin alla parte del circuito di fig. 45.1 che sta alla sinistra del condensatore. La tensione ai capi del condensatore (e quindi anche della R_2) sarà inizialmente invariata $(v_C)_{t_1} = (v_2)_{t_1} = V_b$. Quindi ai capi della resistenza R_1 si avrà: $(v_1)_{t_1} = V_b - (v_C)_{t_1} = 0$. Successivamente con costante di tempo R_eC la tensione v_C va

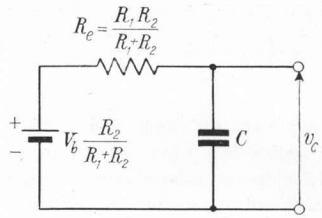


Fig. 45.2 – Circuito equivalente al circuito di fig. 45.1.

decrescendo tendendo a $V_b \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ mentre corrispondentemente va crescendo v_1. Dopo questo periodo transitorio si avrà $(v_C)_{\text{finale}} = (v_2)_{\text{finale}} = V_C \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ e $(v_1)_{\text{finale}} = V_b - (v_C)_{\text{finale}} = V_b \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$. La fig. 45.3 rappresenta graficamente quanto precedentemente determinato.

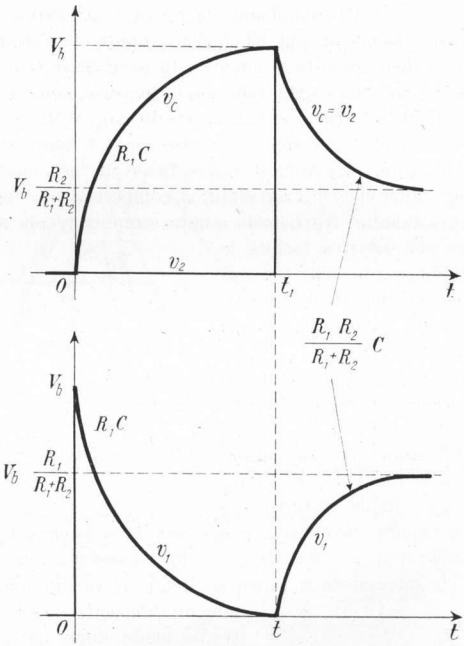


Fig. 45.3 – Andamento delle tensioni nel circuito di fig. 45.1.

Le considerazioni precedenti si possono applicare allo studio dei *partitori compensati*.

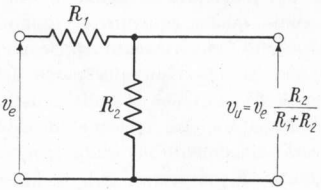


Fig. 45.4 – Partitore resistivo.

Molto spesso occorre attenuare una forma d'onda secondo un prefissato rapporto di attenuazione: condizione essenziale da rispettare è che la forma d'onda pur variando in ampiezza si mantenga inalterata nella forma. Ciò potrebbe essere ottenuto mediante un partitore resistivo come quello di fig. 45.4.

Senonché l'esistenza di capacità parassite in parallelo alle resistenze può alterare il comportamento del partitore. Si può presentare, ad esempio, il caso che in parallelo alla resistenza R_2 esista una capacità distribuita che rende il partitore equivalente a quello di fig. 45.5. La forma d'onda subisce allora, a causa del partitore, sia una attenuazione che una deformazione. Se la v_e è un *gradino* di ampiezza V_0, la v_u diviene una esponenziale crescente di ampiezza $V_0 \cdot R_2/(R_1 + R_2)$ e costante di tempo $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$. Per evitare tale deformazione si pone in parallelo alla R_1 un condensatore di opportuna capacità C_1.

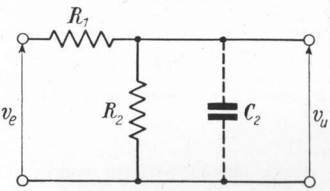


Fig. 45.5 – Partitore resistivo con capacità parassita.

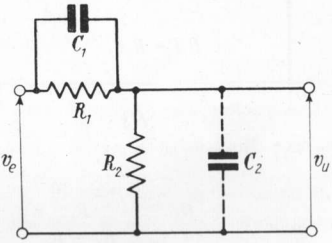


Fig. 45.6 – Partitore compensato.

Il partitore si presenta allora come in fig. 45.6 e qualora mantenga inalterata la forma d'onda si dice partitore compensato. Si vuole ora determinare il valore da assegnare a C_1 per ottenere una perfetta compensazione.

La tensione di ingresso sia un *gradino* di ampiezza V_0. Nell'istante $t = 0$ in cui il gradino viene applicato i condensatori (scarichi) si comportano come un corto circuito. Si ha quindi un impulso di corrente che istantaneamente carica i due condensatori facendo salire la tensione ai loro capi. Sarà quindi (dato che la tensione applicata ad una serie di condensatori si ripartisce in parti inversamente proporzionali alle rispettive capacità):

$$(v_u)_{t=0} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} .$$

Dopo un tempo molto grande o per lo meno sufficiente perché cessi il regime transitorio (teoricamente un tempo infinito) i condensatori, raggiunta la carica finale, si comporteranno come resistenze di valore infinito ed il regime delle correnti e delle tensioni sarà unicamente determinato dalle resistenze. Sarà quindi:

$$(v_u)_{t=\infty} = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Se è $(v_u)_{t=0} \neq (v_u)_{t=\infty}$ la forma d'onda in uscita risulterà deformata essendovi tra il valore raggiunto inizialmente e quello finale una esponenziale crescente

o decrescente come indica la fig. 45.7. Il gradino di tensione in uscita risulta invece indeformato se è $(v_u)_{t=0} = (v_u)_{t=\infty}$. Affinché ciò avvenga deve essere

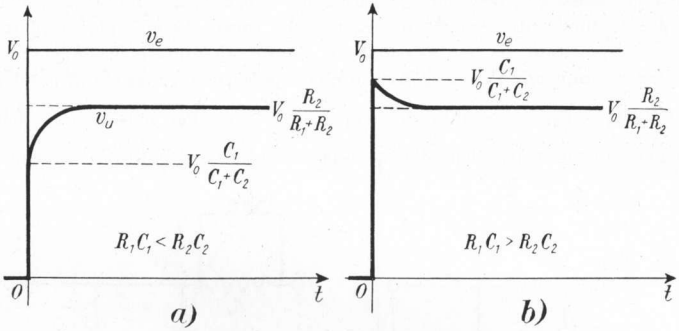


Fig. 45.7 – Risposta ad un gradino di tensione di un partitore non perfettamente compensato.

ovviamente $\dfrac{C_1}{C_1 + C_2} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ da cui si ricava che la perfetta compensazione si ha per:

45.1 $$R_1C_1 = R_2C_2 \text{ (1)} .$$

Più complessa risulta la risposta del partitore (compensato o no) ad un *impulso rettangolare* di ampiezza V_0 e durata t_0 (che qui si suppone sufficientemente più grande di R_eC_e). Fino all'istante t_0 tutto avviene come nel caso che in ingresso venga applicato un gradino di tensione di ampiezza V_0.

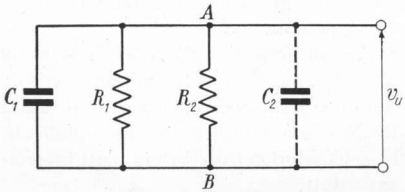


Fig. 45.8 – Circuito equivalente del partitore di fig. 45.6 al fronte negativo di un impulso rettangolare.

Successivamente annullandosi la tensione di ingresso il circuito diviene equivalente a quello rappresentato in fig. 45.8. I due condensatori che prima erano soggetti a tensioni diverse, rispettivamente $v_2 = V_0 \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ e $v_1 = V_0 \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, venendosi ora a trovare in parallelo si dispongono alla

(1) Si può ricavare il medesimo risultato analiticamente determinando anche la costante di tempo dell'esponensiale crescente e decrescente di fig. 45.7. A questo scopo si può scrivere:

45.2 $$V_0 = v_1 + v_2$$
$$i_{R_1} + i_{C_1} = i_{R_2} + i_{C_2}$$

stessa tensione facilmente determinabile dividendo la quantità di elettricità totale $Q_2 - Q_1$ per la capacità totale $C_1 + C_2$. La variazione della tensione v_u avviene istantaneamente passando dal valore $V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ al valore:

$$(v_u)_{t_0} = \frac{Q_2 - Q_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_2 V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - C_1 V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{C_1 + C_2}$$

che semplificato risulta:

45.5 $$(v_u)_{t_0} = V_0 \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} .$$

---

avendo indicato con v_1 e v_2 le tensioni rispettivamente ai capi dei due paralleli RC e con i_{R_1}, i_{C_1}, i_{R_2} e i_{C_2} le singole intensità di corrente. Ricavando dalla prima delle 45.2 il valore di $v_1 = V_0 - v_2$ e sostituendo nella seconda si ottiene:

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_2}{dt} = \frac{V_0}{R_1} - v_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

da cui

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{C_1 + C_2} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 - v_2 \right) .$$

Ponendo ora

$$\frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{C_1 + C_2} = \frac{1}{R_e C_e}$$

l'ultima relazione diviene

$$\frac{dv_2}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 - v_2} = \frac{dt}{R_e C_e}$$

che, dopo integrazione e passaggio dai logaritmi ai numeri, dà:

45.3 $$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 - v_2 = k e^{-t/R_e C_e} .$$

La costante k si ricava imponendo la condizione iniziale ossia che per $t = 0$ deve essere $(v_2)_{t=0} = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ come detto precedentemente. Imponendo questa condizione nella 45.3 si ricava:

$$k = V_0 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 - C_2} \right)$$

e sostituendo questo valore nella 45.3:

45.4 $$v_2 = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_0 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) e^{-t/R_e C_e} .$$

La 45.4 conferma quanto già visto in fig. 45.7 nel caso che il partitore non sia compensato, aggiungendo che la costante di tempo con cui si passa dal tratto verticale al tratto orizzontale è $R_e C_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)$. Inoltre anche dalla 45.4 si può ricavare la condizione 45.1 di perfetta compensazione.

Si noti che nel caso di una perfetta compensazione ($R_1C_1 = R_2C_2$) la v_u si riduce istantaneamente a zero riproducendo esattamente come forma la v_e. Se invece il partitore non è compensato ($R_2C_2 \neq R_1C_1$) la v_u subisce nell'istante t_0 una brusca variazione negativa di ampiezza

$$V_0 \frac{R_2C_2 - R_1C_1}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} - V_0 \frac{R_2}{R_1+R_2} = -V_0 \frac{C_1}{C_1+C_2}$$

che in valore assoluto è uguale al salto della v_u nell'istante $t = 0$. Se quindi il partitore è sovracompensato ($R_1C_1 > R_2C_2$) la v_u nell'istante t_0 scende ad un valore negativo; questo valore invece è ancora positivo se il partitore è sottocompensato ($R_1C_1 < R_2C_2$). Successivamente il condensatore di capacità equivalente $C_e = C_1 + C_2$ si scarica esponenzialmente sulla resistenza equivalente $R_e = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ con costante di tempo R_eC_e. La fig. 45.9 rappresenta la risposta ad un impulso rettangolare di tre partitori di cui il primo compensato, il secondo sovracompensato ed il terzo sottocompensato.

In pratica il condensatore di compensazione C_1 sarà un compensatore di capacità variabile nell'intorno del valore calcolato teoricamente per avere una perfetta compensazione. Osservando quindi mediante un

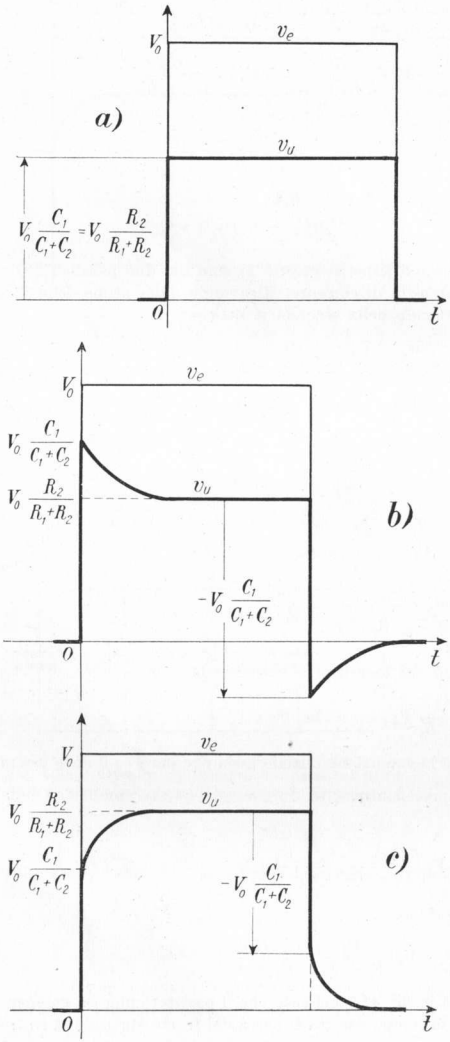


Fig. 45.9 – Risposta ad un impulso rettangolare di un partitore: *a*) perfettamente compensato; *b*) sovracompensato; *c*) sottocompensato.

oscilloscopio la risposta del partitore ad una forma d'onda rettangolare si regolerà la capacità fino ad ottenere la migliore risposta.

Finora si è supposto privo di resistenza interna il generatore che alimenta il partitore. In realtà questa resistenza non è mai nulla per cui il comportamento del partitore sarà diverso da quello esaminato. Si supponga che il partitore sia perfettamente compensato ($R_1C_1 = R_2C_2$). In questo caso risulta istante per istante $v_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} v_{12}$ e $v_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v_{12}$ dove ora v_{12} rappresenta il valore istantaneo della tensione ai capi del partitore, valore necessariamente

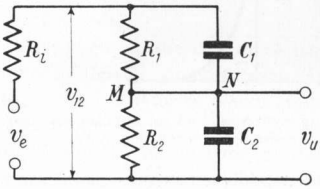


Fig. 45.10 – Partitore compensato alimentato da un generatore di tensione con resistenza interna non nulla.

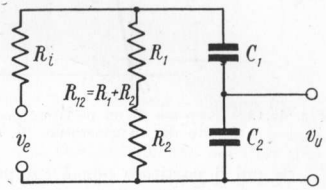


Fig. 45.11 – Circuito equivalente a quello di fig. 45.10 nel caso di perfetta compensazione.

diverso dalla tensione v_e fornita dal generatore a causa della caduta di tensione nella sua resistenza interna R_i (fig. 45.10). Sarà anche $i_{R_1} = v_1/R_1 = \dfrac{v_{12}}{R_1 + R_2}$ e $i_{R_2} = v_2/R_2 = \dfrac{v_{12}}{R_1 + R_2}$. Ossia, ammessa la perfetta compensazione, saranno uguali le correnti nella R_1 e nella R_2 e quindi nel conduttore MN non circolerà corrente. Il circuito risulta allora equivalente a quello di fig. 45.11 dal quale è stato asportato il conduttore MN. Quest'ultimo circuito si trasforma poi facilmente in quello di fig. 45.12. Se ora la tensione di ingresso è un *gradino di tensione* di ampiezza V_0 la tensione di uscita risulterà:

$$v_u = V_0 \frac{R_{12}}{R_i + R_{12}} \frac{C_1}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/R_eC_e})$$

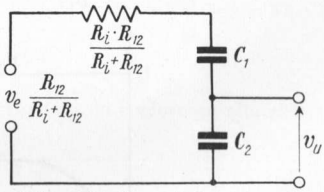


Fig. 45.12 – Circuito equivalente a quello di fig. 45.11.

essendo la costante di tempo $R_eC_e = \dfrac{R_iR_{12}}{R_i + R_{12}} \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Se invece la tensione di ingresso è un *impulso rettangolare* di ampiezza V_0 e durata $t_0 (t_0 \gg R_eC_e)$ dall'istante t_0 in poi sarà:

$$v_u = V_0 \frac{R_{12}}{R_i + R_{12}} \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-t/R_eC_e} .$$

La fig. 45.13 rappresenta la risposta di un partitore compensato ad un impulso rettangolare fornito da un generatore di resistenza interna diversa da zero.

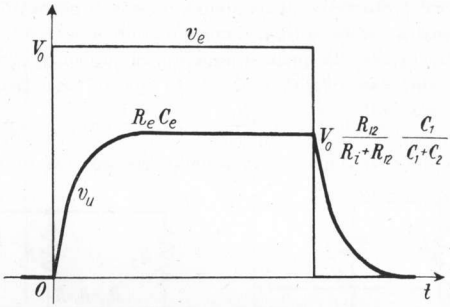


Fig. 45.13 – Risposta di un partitore perfettamente compensato ad un impulso rettangolare fornito da un generatore di tensione di resistenza interna non nulla.

Se poi il partitore non è compensato la risposta sarà come quella rappresentata in fig. 45.14, *a*) se $R_1C_1 > R_2C_2$ e come quella rappresentata in figura 45.14, *b*) se $R_1C_1 < R_2C_2$.

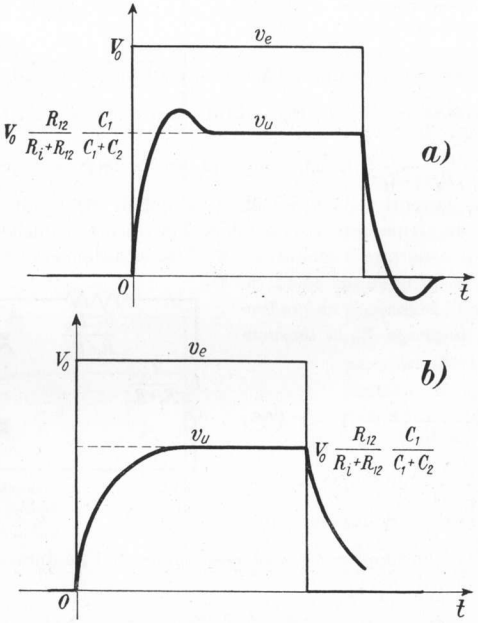


Fig. 45.14 – Risposta ad un impulso rettangolare (fornito da un generatore di tensione di resistenza interna non nulla) di un partitore: *a*) sovracompensato; *b*) sottocompensato.

46. – *Circuito RL: risposta ad un gradino di tensione.*

Nel circuito RL di fig. 46.1 venga applicato, come tensione di ingresso v_e, un *gradino di tensione* di ampiezza V_0:

$$v_e = V_0 \cdot 1(t) \ .$$

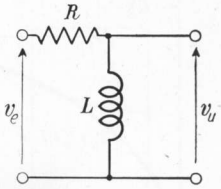


Fig. 46.1 – Circuito RL.

Si vuole determinare la tensione di uscita v_u, ai capi dell'induttore.

Come è già stato rilevato al paragrafo 33, il circuito RL ha un comportamento analogo al circuito CR sia per le forme d'onda sinusoidali sia per le altre forme d'onda come si potrebbe verificare confrontando le equazioni differenziali relative al comportamento dei due circuiti. Si potranno quindi utilizzare i risultati validi per il circuito CR con l'avvertenza di sostituire con L/R la costante RC che compare in quelli.

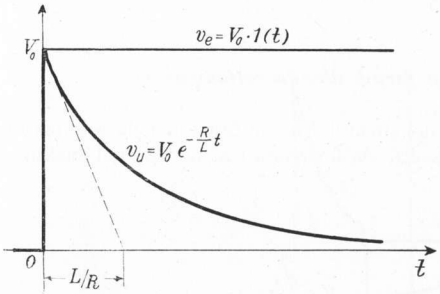


Fig. 46.2 – Risposta ad un gradino di tensione di un circuito RL.

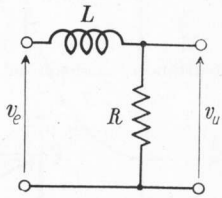


Fig. 46.3 – Circuito LR.

La risposta ad un gradino di tensione sarà quindi, in conformità alla 42.6:

46.1 $$v_u = V_0 e^{-(R/L)t} \ .$$

La 46.1 è rappresentata nella fig. 46.2.

Se invece il *gradino di tensione* viene applicato al circuito LR di fig. 46.3, che si comporta come il circuito RC, la risposta sarà:

46.2 $$v_u = V_0(1 - e^{-(R/L)t}) \ ,$$

come indicato dalla fig. 46.4.

La risposta del circuito LR parallelo di fig. 46.5 ad un gradino di corrente di ampiezza I_0 si può facilmente ricavare trasformando mediante il teorema di Norton il circuito in esame nel circuito RL serie di fig. 46.1, al cui ingresso venga applicato un gradino di tensione di ampiezza $V_0 = RI_0$.

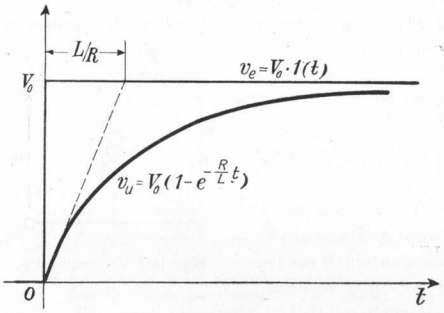


Fig. 46.4 – Risposta ad un gradino di tensione di un circuito LR.

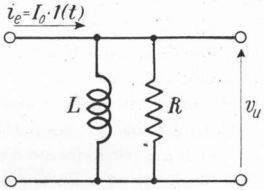


Fig. 46.5 – Circuito LR parallelo.

47. – *Circuito RL: risposta a forme d'onda rettangolari.*

Si può ottenere la risposta del circuito RL alle forme d'onda rettangolari sfruttando l'analogia del circuito RL con il circuito CR. Le relazioni analitiche

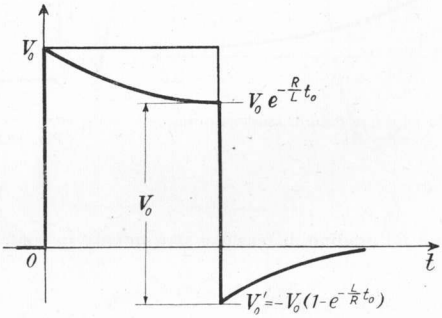


Fig. 47.1 – Risposta di un circuito RL ad un impulso rettangolare.

ottenute per quest'ultimo circuito nel paragrafo 43 sono ancora valide ora sostituendo alla costante di tempo RC la costante L/R.

La fig. 47.1 indica la risposta ad un impulso rettangolare, mentre la risposta

ad una *forma d'onda rettangolare* periodica è indicata in fig. 47.2 per un circuito RL a grande costante di tempo ed in fig. 47.3 per un circuito RL a piccola costante di tempo. Il circuito RL è un *circuito derivatore*.

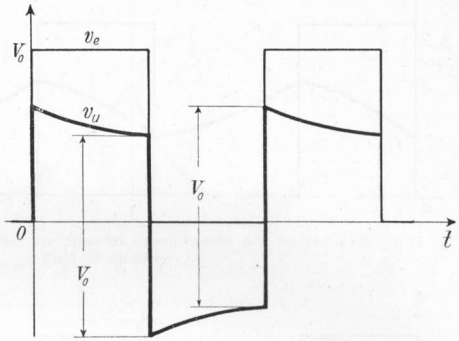


Fig. 47.2 – Risposta di un circuito RL a grande costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

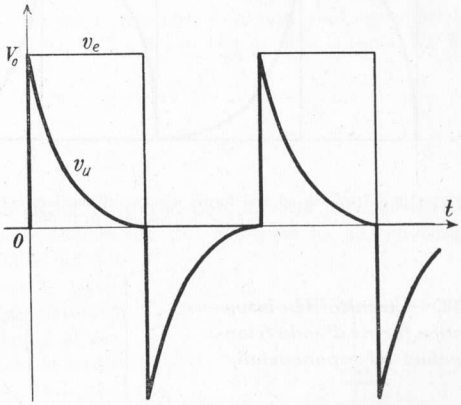


Fig. 47.3 – Risposta di un circuito RL a piccola costante di tempo ad una forma d'onda rettangolare periodica.

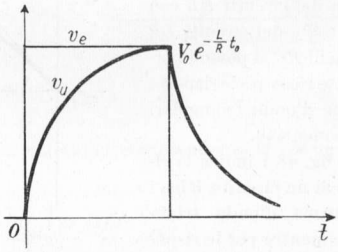


Fig. 47.4 – Risposta ad un impulso rettangolare di un circuito LR.

Nelle figg. 47.4, 47.5 e 47.6 sono indicate le risposte ad un impulso rettangolare ed a forme d'onda rettangolari periodiche di circuiti *LR* di comportamento analogo ai circuiti *RC*. Il circuito *LR* è un *circuito integratore*.

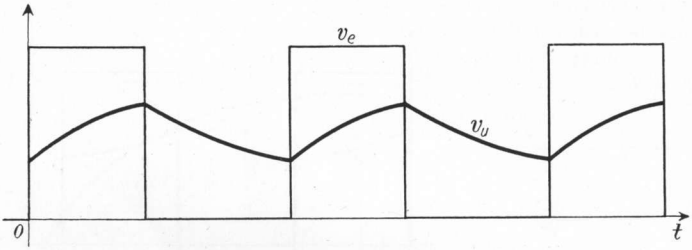


Fig. 47.5 – Risposta ad una forma d'onda rettangolare periodica di un circuito *LR* a grande costante di tempo.

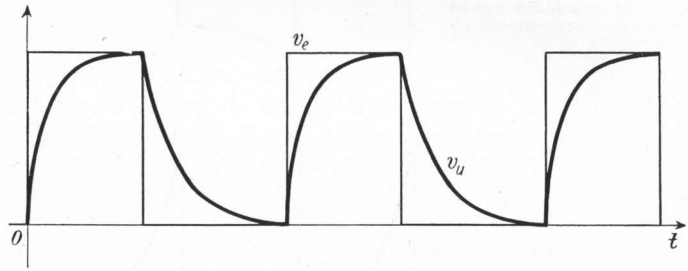


Fig. 47.6 – Risposta ad una forma d'onda rettangolare periodica di un circuito *LR* a piccola costante di tempo.

48. – *Circuito RL: risposta a forme d'onda triangolari ed esponenziali.*

Sempre sfruttando l'analogia dei circuiti *RL* con quelli *CR* e dei circuiti *LR* con quelli *RC* si possono facilmente ricavare le risposte a forme d'onda triangolari ed esponenziali.

La fig. 48.1 indica la risposta di un circuito *RL* ad una forma d'onda triangolare, mentre per le rispo-

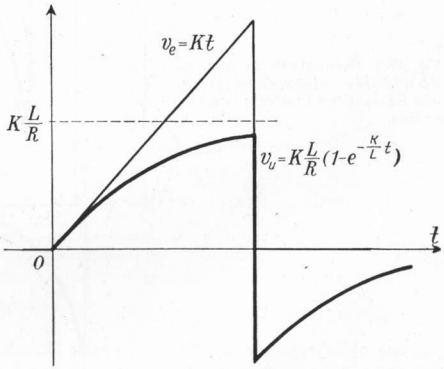


Fig. 48.1 – Risposta di un circuito *RL* ad una forma d'onda triangolare.

ste ad impulsi o a forme d'onda esponenziali crescenti sono valide le curve di fig. 44.6 e di fig. 44.7 qualora si legga L/R al posto di RC.

Allo stesso modo la fig. 48.2 indica la risposta di un circuito LR ad una

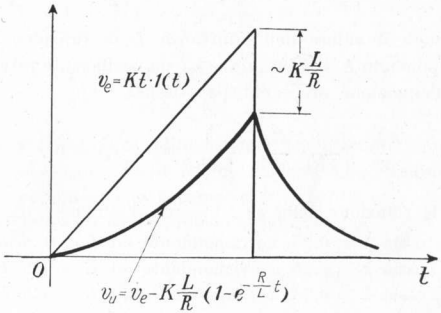


Fig. 48.2 – Risposta di un circuito LR ad una forma d'onda triangolare.

forma d'onda triangolare, mentre per le risposte ad impulsi o ad esponenziali crescenti sono valide le curve di fig. 44.2 e di fig. 44.4 qualora si legga L/R al posto di RC.

49. – *Circuiti RLC.*

Tra i vari circuiti RLC interessa qui considerare, in vista delle successive applicazioni, il circuito rappresentato in fig. 49.1 composto da un condensatore di capacità C in parallelo ad un lato di resistenza R ed induttanza L. Il circuito sia alimentato da un generatore di corrente che fornisca un gradino di ampiezza I_0. Si vuole determinare la tensione di uscita v_u.

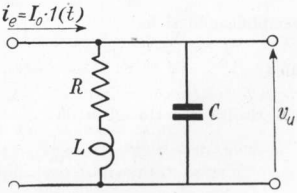


Fig. 49.1 – Circuito RLC.

Indicando con i_L l'intensità di corrente nel ramo che comprende l'induttanza, sarà in ogni istante:

49.1 $$v_u = Ri + L\frac{di_L}{dt},$$

mentre per l'intensità di corrente i_c nel ramo comprendente il condensatore risulta:

$$i_c = C\frac{dv_u}{dt} = RC\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2}.$$

Dovrà essere verificata la relazione $I_0 = i_L + i_C$ e quindi:

$$I_0 = i_L + RC\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} .$$

Conviene esprimere il valore dell'induttanza L in funzione della resistenza e della capacità ponendo $L = kR^2C$, dove k è un coefficiente privo di dimensioni. Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene:

49.2 $$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{kRC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{kR^2C^2}(i_L - I_0) = 0 .$$

Per trovare la soluzione della 49.2 bisogna distinguere tra i seguenti casi:

a) $4k < 1$, ossia $k < 0{,}25$, corrispondente ad $L < 0{,}25\ R^2C$;
b) $4k = 1$, ossia $k = 0{,}25$, corrispondente ad $L = 0{,}25\ R^2C$;
c) $4k > 1$, ossia $k > 0{,}25$, corrispondente ad $L > 0{,}25\ R^2C$.

Nel caso *a*) si trova [1] come soluzione della 49.2:

49.8 $$i_L = I_0 - \frac{I_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\right)e^{-\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}\frac{t}{CR}} - \frac{I_0}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\right)e^{-\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2k}\frac{t}{RC}} .$$

---

[1] Si può ricercare la soluzione dell'equazione differenziale 49.2 ponendo:

49.3 $$i_L - I_0 = e^{mt}$$

da cui si ricava $\frac{di_L}{dt} = me^{mt}$ e $\frac{d^2 i_L}{dt^2} = m^2 e^{mt}$. Sostituendo questi valori nella 49.2 e semplificando si ha

49.4 $$m^2 + \frac{1}{kRC}m + \frac{1}{kR^2C^2} = 0$$

che risolta rispetto ad m dà:

$$m = -\frac{1}{2kRC}(1 \mp \sqrt{1-4k}) .$$

Di qui si ottiene, per il caso più generale in cui si abbiano due soluzioni distinte.

49.5 $$m_1 = -\frac{1}{2kRC} + \frac{\sqrt{1-4k}}{2kRC}$$
$$m_2 = -\frac{1}{2kRC} - \frac{\sqrt{1-4k}}{2kRC} .$$

Nel caso considerato ossia per $4k < 1$, le due soluzioni m_1 ed m_2 dell'equazione caratteristica sono due numeri reali entrambi negativi e la soluzione generale della

Sostituendo quest'ultimo valore nella 49.1, facendo le opportune semplificazioni e dividendo entrambi i membri per RI_0 si perviene alla relazione:

$$\frac{v_u}{RI_0} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-2k}{\sqrt{1-4k}}\right) e^{-\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}\frac{t}{RC}} - \tag{49.9}$$

$$- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-2k}{\sqrt{1-4k}}\right) e^{-\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2k}\frac{t}{RC}} .$$

La 49.9 esprime il rapporto adimensionale tra il valore istantaneo v_u della tensione di uscita ed il valore finale RI_0 in funzione della variabile pure adimensionale t/RC, comparendo come parametro $k = L/R^2C$.

Nel caso *b*) si trova [1] come soluzione della 49.2:

$$i_L = I_0 - \left(I_0 + \frac{I_0}{2k}\frac{t}{RC}\right) e^{-t/2kRC} \tag{49.11}$$

per mezzo della quale si ottiene:

$$\frac{v_u}{RI_0} = 1 - \left(1 + \frac{t}{RC}\right) e^{-\frac{t}{2kRC}} . \tag{49.12}$$

49.2 si può scrivere:

$$i_L - I_0 = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} \tag{49.6}$$

dove A e B sono due costanti da determinarsi imponendo che nell'istante $t = 0$ risulti $i_L = 0$ (a causa dell'opposizione dell'induttanza alle variazioni di corrente) e $v_u = 0$ (opposizione del condensatore alle variazioni di tensione). Si ricava:

$$A + B = -I_0$$

$$A(1 + \sqrt{1-4k}) + B(1 - \sqrt{1-4k}) = -2I_0$$

che risolte danno:

$$A = -\frac{I_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\right)$$

$$B = -\frac{I_0}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-4k}}\right) . \tag{49.7}$$

Sostituendo nella 49.6 i valori dati dalle 49.5 e dalle 49.7 si ricava la 49.8.

[1] Difatti per $4k = 1$ le due radici dell'equazione caratteristica 49.4 risultano coincidenti $m_1 = m_2 = -1/2kRC$ e la soluzione dell'equazione differenziale 49.2 si può scrivere:

$$i_L - I_0 = (A + Bt)e^{m_1 t} \tag{49.10}$$

dove, come al solito, le costanti A e B vengono determinate in base alle condizioni iniziali. Si ricava:

$$A = -I_0$$

$$B = -\frac{I_0}{2kRC}$$

e mediante facili sostituzioni si giunge alla 49.11.

Infine nel caso *c*) si determina [1]:

$$49.14 \quad \frac{v_u}{RI_0} = 1 - e^{-\frac{1}{2k}\frac{t}{RC}}\left(\cos\frac{\sqrt{4k-1}}{2k}\,\frac{t}{RC} - \frac{2k}{\sqrt{4k-1}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{4k-1}}{2k}\,\frac{t}{RC}\right).$$

La fig. 49.2 pone a confronto le risposte ad un gradino di corrente di circuiti *RLC* con diverso valore di *k*, riportando anche il caso di $k = 0$ ossia quello di

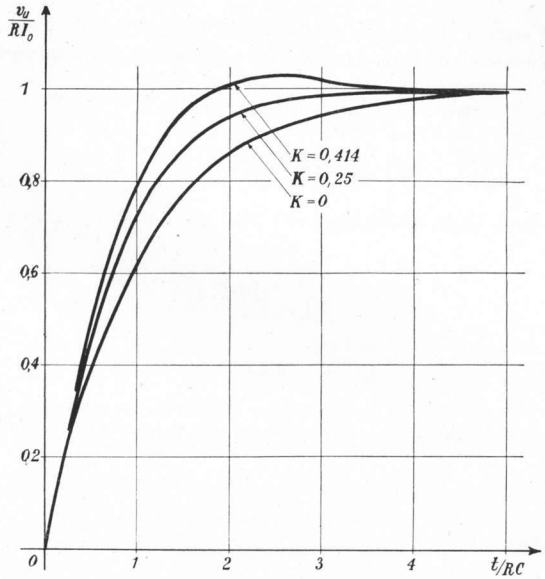


Fig. 49.2 – Risposta ad un gradino di corrente di circuiti *RLC* con diversi valori di k $\left(k = \frac{L}{R^2C}\right)$.

un semplice circuito *RC*. Si nota come aumentando *k* la risposta del circuito migliora in quanto si riduce il tempo di salita. Il valore particolare $k = 0{,}25$

---

[1] Infatti per $4k > 1$ le soluzioni dell'equazione caratteristica 49.4 sono due radici complesse coniugate:

$$m_1 = -\frac{1}{2kRC} + j\,\frac{\sqrt{4k-1}}{2kRC} = -\alpha + j\omega\ ;$$

$$m_2 = -\frac{1}{2kRC} - j\,\frac{\sqrt{4k-1}}{2kRC} = -\alpha - j\omega\ .$$

segna il limite tra assenza e presenza di oscillazione della tensione di uscita v_u attorno al valore finale RI_0. Qualora quindi si voglia ottenere la miglior risposta del circuito senza superamento del valore finale occorre appunto porre $L = 0{,}25R^2C$. Se invece si tollera un leggero superamento del valore finale allo scopo di migliorare la salita di v_u si può fare $k > 0{,}25$. In fig. 49.2 si vede come con $L = 0{,}414R^2C$ il superamento del valore finale sia contenuto entro il 3 %.

La soluzione dell'equazione differenziale 49.2 si può scrivere:

49.13 $$i_L - I_0 = e^{-\alpha t}(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t})$$

che, ponendo $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t$ ed $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t$, diviene:

$$i_L - I_0 = e^{-\alpha t}[(A + B) \cos \omega t + j(A - B) \operatorname{sen} \omega t]$$

Imponendo le condizioni iniziali e facendo le opportune sostituzioni si giunge infine alla relazione 49.14.

CAPITOLO VII

CIRCUITI ACCOPPIATI

50. – *Oscillazioni libere in circuiti oscillatori accoppiati.*

Si è visto precedentemente, studiando le oscillazioni libere, che chiudendo su una induttanza un condensatore preventivamente caricato con una certa quantità di energia, il condensatore si scarica dando luogo nel circuito a delle oscillazioni di tensione e di corrente, persistenti in un circuito privo di perdite, smorzate in un circuito reale. La frequenza delle oscillazioni dipende dagli elementi del circuito e rappresenta il ritmo con il quale avviene lo scambio di energia elettrostatica in elettromagnetica tra il condensatore e l'induttore.

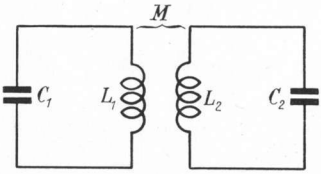


Fig. 50.1 – Circuiti oscillatori accoppiati, soggetti ad oscillazioni libere.

Il fenomeno si complica quando l'induttore del circuito in cui avviene la scarica del condensatore preventivamente caricato è magneticamente accoppiato con un altro induttore facente parte di un secondo circuito oscillatorio (fig. 50.1): è il caso delle *oscillazioni libere in circuiti oscillatori accoppiati*. Senza entrare nella trattazione analitica del fenomeno, si può vedere succintamente come esso si svolga, limitando le considerazioni al caso più semplice che entrambi i circuiti siano singolarmente accordati sulla stessa pulsazione:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} .$$

Si supponga che sia il condensatore C_1 ad essere stato preventivamente caricato. Mentre esso si scarica inviando corrente nell'induttore L_1, la sua energia elettrostatica va diminuendo mentre aumenta l'energia elettromagnetica posseduta dall'induttore. La tensione v_1 ai capi di C_1 va diminuendo, mentre aumenta l'intensità di corrente i_1. Frattanto la variazione di i_1 induce una f.e.m. in L_2, causa a sua volta di una intensità di corrente i_2. Anche il condensatore C_2 si va caricando. L'energia trasferita a questo modo nel secondo circuito oscillatorio viene a sottrarsi a quella fornita inizialmente al primo circuito per cui l'energia che ricarica il condensatore C_1 al termine del primo semiperiodo avrà un valore inferiore al valore iniziale corrispondente a V_0. Durante il secondo semiperiodo avverrà ancora una diminuzione di energia nel primo circuito non

per dissipazione, in quanto si suppongono per ora i circuiti privi di perdite, ma sempre per trasferimento al secondario. Così andranno successivamente diminuendo le ampiezze della v_1 e della i_1, mentre andranno aumentando, con l'aumentare dell'energia trasferita al secondario, le ampiezze della i_2 e della v_2. Dopo un certo intervallo di tempo tutta l'energia si sarà trasferita al secondario: saranno massime le ampiezze di i_2 e v_2 e nulle le ampiezze di i_1 e v_1. Dopodiché i circuiti si ritroveranno nelle condizioni iniziali tranne che ora sarà carico il secondo anziché il primo. Inizierà allora una nuova serie di oscillazioni durante le quali avverrà il trasferimento dell'energia dal secondario al primario. Quando questo trasferimento sarà stato ultimato i due circuiti si troveranno nelle precise condizioni iniziali e sarà quindi trascorso un periodo completo nel trasferimento di energia.

Da quanto detto si può quindi distinguere un doppio ordine di fenomeni: il primo consiste nello stabilirsi in ciascun circuito delle oscillazioni di tensione e di corrente come avviene nei circuiti oscillatori semplici; il secondo consiste invece nel passaggio alternativo di energia tra i due circuiti. In fig. 50.2 sono rappresentati gli andamenti della i_1 e della i_2. Si nota la presenza di un periodo piuttosto breve nelle oscillazioni di ciascun circuito e di un periodo invece notevolmente più lungo nel fenomeno del trasferimento di energia, individuato dall'inviluppo sinusoidale delle oscillazioni che si svolgono in ciascun circuito.

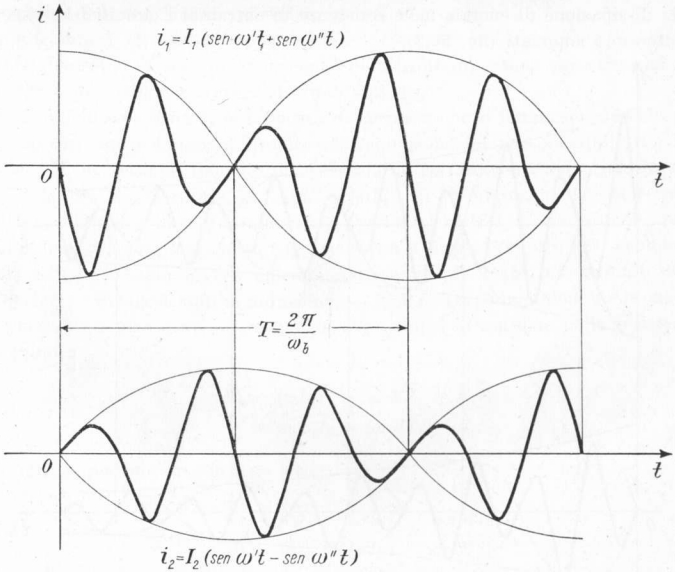


Fig. 50.2 – Fenomeno dei battimenti nei circuiti oscillatori accoppiati soggetti ad oscillazioni libere. (Per semplicità in figura si è rappresentata la frequenza delle oscillazioni poco maggiore di quella dell'inviluppo, mentre in realtà le due frequenze differiscono molto tra loro).

Si constata pure che gli inviluppi dei massimi della i_1 e della i_2 sono tra loro sfasati in modo che all'uno compete un massimo quando all'altro compete un minimo, corrispondenti rispettivamente a massimo e minimo di energia.

Lo studio analitico del fenomeno conduce a considerare le due intensità di corrente i_1 ed i_2 come somma e differenza di due oscillazioni di ampiezza uguale e pulsazioni tanto più diverse tra loro quanto maggiore è il coefficiente di accoppiamento k. Si ha cioè:

$$i_1 = I_1 (\text{sen}\, \omega' t + \text{sen}\, \omega'' t)$$
$$i_2 = I_2 (\text{sen}\, \omega' t - \text{sen}\, \omega'' t)$$

essendo:

50.1 $$\omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \quad \text{ed} \quad \omega'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} .$$

Il fenomeno per cui dalla composizione di oscillazioni sinusoidali di frequenza leggermente diversa ed ugual ampiezza sorgono delle oscillazioni ad inviluppo dei massimi sinusoidale si dice *fenomeno dei battimenti*. La pulsazione dei battimenti ω_b risulta come differenza delle pulsazioni componenti ω' ed ω''. Si ha cioè:

50.2 $$\omega_b = \omega' - \omega'' .$$

La fig. 50.2 in cui i battimenti raggiungono valori massimi costanti si riferisce a circuiti oscillatori accoppiati privi di perdite. Nel caso reale invece a causa della dissipazione di energia nelle resistenze di entrambi i circuiti i battimenti risulteranno smorzati (fig. 50.3).

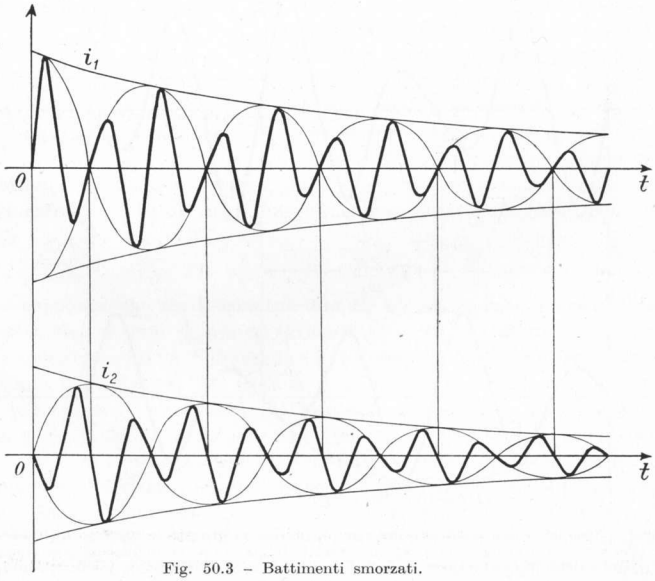


Fig. 50.3 – Battimenti smorzati.

Il fenomeno si complica ancora di più quando i due circuiti sono singolarmente accordati su frequenze diverse o quando le perdite dei due circuiti sono rilevanti. Si passa allora dai battimenti alle oscillazioni libere di ciascun circuito od ancora alla assenza delle oscillazioni.

51. – *Circuiti accoppiati in regime sinusoidale.*

Siano dati i due circuiti accoppiati per mutua induzione di fig. 51.1. Nel circuito primario, i cui elementi sono contrassegnati con l'indice 1, agisca un generatore di tensione sinusoidale $\overline{V}_0$. Nel secondario, i cui elementi sono contrassegnati con l'indice 2, non vi sia alcun generatore e sia M il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti.

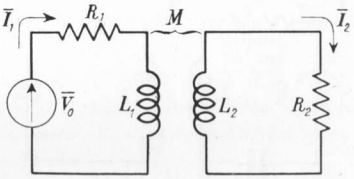


Fig. 51.1 – Circuiti accoppiati per mutua induzione.

La corrente di intensità variabile che il generatore invia nel circuito primario origina una f.e.m. indotta e quindi una corrente indotta nel secondario, la quale a sua volta determina nel primario una f.e.m. di mutua induzione. Il regime delle correnti e delle tensioni che si stabilisce in entrambi i circuiti accoppiati può essere determinato solo tenendo conto della contemporanea presenza dei due circuiti e dell'azione reciproca dell'uno sull'altro.

Si indichi con $\overline{I}_1$ ed $\overline{I}_2$ le intensità di corrente che si hanno nei due circuiti. Si può scrivere per ciascun circuito una equazione relativa all'equilibrio delle f.e.m. con le tensioni, tenendo presente che le f.e.m. agenti nel primario sono la $\overline{V}_0$ dovuta al generatore, la f.e.m. $-j\omega L_1\overline{I}_1$ di autoinduzione che la $\overline{I}_1$ causa nella L_1 e la f.e.m. di mutua induzione $-j\omega M\overline{I}_2$ che la $\overline{I}_2$ causa in quella parte dell'induttanza primaria che si concatena con il flusso prodotto dal secondario. Nel secondario sono invece unicamente presenti la f.e.m. di autoinduzione, $-j\omega L_2\overline{I}_2$, e quella di mutua induzione, $-j\omega M\overline{I}_1$. La somma delle f.e.m. agenti in ciascun circuito deve essere uguale alla caduta di tensione nella resistenza. È quindi:

$$\begin{aligned} \overline{V}_0 - j\omega L_1\overline{I}_1 - j\omega M\overline{I}_2 &= R_1\overline{I}_1 \\ -j\omega L_2\overline{I}_2 - j\omega M\overline{I}_1 &= R_2\overline{I}_2 \end{aligned} \tag{51.1}$$

Le 51.1 si possono trasformare nelle

$$\begin{aligned} \overline{V}_0 &= R_1\overline{I}_1 + j\omega L_1\overline{I}_1 + j\omega M\overline{I}_2 \\ 0 &= R_2\overline{I}_2 + j\omega L_2\overline{I}_2 + j\omega M\overline{I}_1 \end{aligned} \tag{51.2}$$

Le 51.2 (che si sarebbero potute scrivere direttamente considerando anziché le f.e.m. di auto o mutua induzione le cadute di tensione corrispondenti) si sem-

plificano nelle:

51.3
$$\overline{V}_0 = (R_1 + j\omega L_1)\overline{I}_1 + j\omega M\overline{I}_2$$
$$0 = (R_2 + j\omega L_2)\overline{I}_2 + j\omega M\overline{I}_1$$

od ancora, tenendo presente che le espressioni entro parentesi sono l'impedenza rispettivamente del primario $\overline{Z}_1$ e del secondario $\overline{Z}_2$,

51.4
$$\overline{V}_0 = \overline{Z}_1\overline{I}_1 + j\omega M\overline{I}_2$$
$$0 = \overline{Z}_2\overline{I}_2 + j\omega M\overline{I}_1 \, .$$

Le 51.4 si applicano a circuiti accoppiati di composizione anche più generale di quelli che compaiono in fig. 51.1, ad esempio a quelli di fig. 51.2 in cui compaiono anche dei condensatori, le cui reattanze andranno conglobate nelle impedenze $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$. Questi ultimi circuiti accoppiati sono circuiti oscillatori; essi rientrano soltanto come caso particolare nella trattazione dei circuiti accoppiati del presente paragrafo.

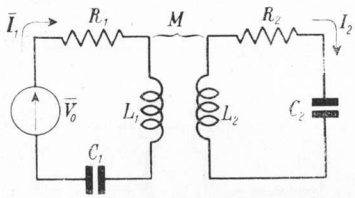


Fig. 51.2 – Circuiti oscillatori accoppiati per mutua induzione.

Dalla seconda delle 51.4 si ricava l'espressione dell'intensità di corrente al secondario in funzione di quella del primario:

51.5
$$\overline{I}_2 = \frac{-j\omega M\overline{I}_1}{\overline{Z}_2}$$

e sostituendola nella prima delle 51.4, si ottiene:

51.6
$$\overline{V}_0 = \overline{Z}_1\overline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2}\overline{I}_1 \, .$$

Infine dalla 51.6 si può ricavare l'espressione della intensità di corrente al primario:

51.7
$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1 + \dfrac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2}} \, .$$

La 51.7 dice che l'intensità di corrente che si determina nel primario dei due circuiti accoppiati è la stessa che si determinerebbe in un circuito isolato in cui agisse il medesimo generatore di tensione V_0 e nel quale in serie all'impedenza propria del primario $\overline{Z}_1$ vi fosse una impedenza aggiunta di valore $\dfrac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2}$.

Questo circuito, indicato in fig. 51.3, si dice *circuito equivalente primario*; l'impedenza complessiva $\overline{Z}_{1e}$ che compare a denominatore della 51.7 si dice *impedenza equivalente del primario* ed è composta della somma della impedenza vera e propria del primario $\overline{Z}_1$ e di una impedenza $\overline{Z}'_2$ che tiene conto dell'impedenza $\overline{Z}_2$ del secondario e che si dice *impedenza del secondario riportata al primario*. La 51.7 può quindi scriversi:

51.8 $$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_{1e}} = \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}'_2} .$$

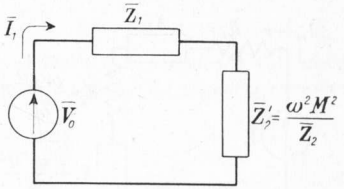


Fig. 51.3 – Circuito equivalente primario di due circuiti accoppiati.

L'impedenza del secondario riportata al primario $\overline{Z}'_2$ sarà in generale un'impedenza complessa scomponibile nelle sue due parti: reale od ohmica ed immaginaria o reattiva. Conviene operare questa scomposizione in modo da valutare la *resistenza del secondario riportata al primario* R'_2 e la *reattanza del secondario riportata al primario* X'_2. Si può scrivere:

51.9 $$\overline{Z}'_2 = \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + jX_2} .$$

Moltiplicando numeratore e denominatore dell'ultima frazione per il coniugato del denominatore $(R_2 - jX_2)$ si ottiene:

51.10 $$\overline{Z}'_2 = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + X_2^2} (R_2 - jX_2) = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} (R_2 - jX_2)$$

ed infine separando la parte reale dalla parte immaginaria:

51.11 $$\overline{Z}'_2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 - j \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2 .$$

Risultano quindi:

51.12 $$\left| \begin{aligned} R'_2 &= \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 \\ X'_2 &= - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2 . \end{aligned} \right.$$

Dalla 51.12 si deduce che la resistenza del secondario viene riportata al primario col proprio segno aumentando le perdite equivalenti; la reattanza del secondario invece viene riportata al primario con il segno cambiato. Se quindi la reattanza propria del secondario è prevalentemente induttiva, riportata al primario diviene prevalentemente capacitiva e viceversa.

La fig. 51.4 è stata dedotta dalla 51.3 scomponendo le due impedenze ivi presenti nelle loro parti ohmiche e reattive; mentre nella fig. 51.5 sono state messe in evidenza la *resistenza equivalente del primario* R_{1e}, somma della resistenza del primario e della resistenza del secondario riportata al primario, e la

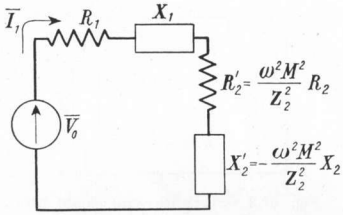


Fig. 51.4 – Circuito equivalente primario di due circuiti accoppiati: le impedenze sono state scomposte nelle loro componenti ohmiche e reattive.

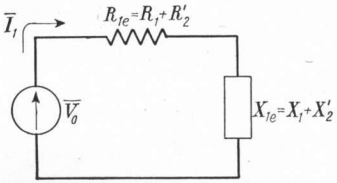


Fig. 51.5 – Circuito equivalente primario di due circuiti accoppiati: sono poste in evidenza la resistenza equivalente e la reattanza equivalente.

reattanza equivalente del primario X_{1e}, somma della reattanza del primario e della reattanza del secondario riportata al primario. La 51.8 si trasforma quindi nella:

51.13 $$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_0}{R_{1e} + jX_{1e}} = \frac{\overline{V}_0}{(R_1 + R'_2) + j(X_1 + X'_2)}$$

e infine nella:

51.14 $$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_0}{\left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2\right) + j\left(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2\right)}$$

da cui si può passare al modulo:

51.15 $$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_0}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2\right)^2 + \left(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} X_2\right)^2}}.$$

Come è stato ricavato un circuito equivalente primario dei due circuiti accoppiati riportando opportunamente gli elementi del secondario, così si può ricavare un *circuito equivalente secondario* riportando opportunamente gli elementi del primario. A questo scopo nel secondo membro della 51.5 si sostituisca alla intensità di corrente del primario $\overline{I}_1$ l'espressione data dalla 51.7:

51.16 $$\overline{I}_2 = \frac{-j\omega M}{\overline{Z}_2} \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2}} = \frac{-j\omega M \overline{V}_0}{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \omega^2 M^2}$$

e si divida numeratore e denominatore dell'ultima frazione per $\overline{Z}_1$:

51.17 $$\overline{I}_2 = \frac{-j\omega M \dfrac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1}}{\overline{Z}_2 + \dfrac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_1}} .$$

La 51.17 dice che il circuito equivalente secondario è un circuito in cui agisce un generatore di tensione $\overline{V}''_0$ che si può definire *tensione del primario riportata al secondario*:

51.18 $$\overline{V}''_0 = -j\omega M \frac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1} .$$

Inoltre nel circuito equivalente secondario è presente l'impedenza propria del secondario $\overline{Z}_2$ e l'*impedenza del primario riportata al secondario*:

51.19 $$\overline{Z}''_1 = \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_1} .$$

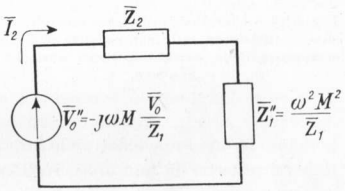


Fig. 51.6 – Circuito equivalente secondario di due circuiti accoppiati.

Denominando *impedenza equivalente del secondario* $\overline{Z}_{2e}$ la somma dell'impedenza propria del secondario e dell'impedenza del primario riportata al secondario la 51.17 può essere scritta nella forma:

51.20 $$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}''_0}{\overline{Z}_{2e}} = \frac{-j\omega M \dfrac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1}}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}''_1} .$$

L'impedenza del primario riportata al secondario si può scomporre nella *resistenza del primario riportata al secondario* R''_1 e nella *reattanza del primario riportata al secondario* X''_1. È sufficiente a questo scopo rendere esplicita l'impedenza del primario che compare a denominatore della 51.19 e moltiplicare quindi numeratore e denominatore della frazione per il coniugato del denominatore:

51.21 $$\overline{Z}''_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + jX_1} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_1^2}(R_1 - jX_1) = \frac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} R_1 - j\frac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} X_1 .$$

Risultano quindi:

51.22 $$R''_1 = \frac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} R_1$$

$$X''_1 = -\frac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} X_1 .$$

Si noti che la resistenza del primario viene riportata al secondario con il proprio segno contribuendo ad aumentarne le perdite, mentre la reattanza del primario viene riportata al secondario con il segno cambiato.

Dal circuito di fig. 51.6 si passa a quelli di fig. 51.7 e di fig. 51.8 prima scom-

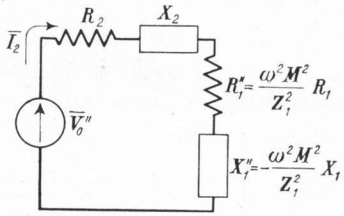


Fig. 51.7 – Circuito equivalente secondario di due circuiti accoppiati: le impedenze sono state scomposte nelle loro componenti ohmiche e reattive.

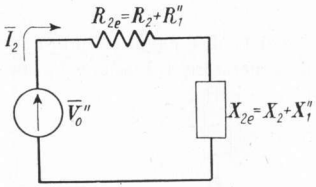


Fig. 51.8 – Circuito equivalente secondario di due circuiti accoppiati: sono poste in evidenza la resistenza equivalente e la reattanza equivalente.

ponendo le due impedenze nelle loro parti resistive e reattive e poi addizionando le parti resistive in una unica *resistenza equivalente secondaria* e le parti reattive in una unica *reattanza equivalente secondaria.*

Si può in tal modo ricavare:

51.23 $$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_0''}{R_{2e} + jX_{2e}} = \frac{\overline{V}_0''}{(R_2 + R_1'') + j(X_2 + X_1'')}$$

ed anche:

51.24 $$\overline{I}_2 = \frac{-j\omega M \dfrac{\overline{V}_0}{\overline{Z}_1}}{\left(R_2 + \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} R_1\right) + j\left(X_2 - \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} X_1\right)},$$

e passando al modulo:

51.25 $$I_2 = \frac{\omega M \dfrac{V_0}{Z_1}}{\sqrt{\left(R_2 + \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} R_1\right)^2 + \left(X_2 - \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_1^2} X_1\right)^2}}.$$

Come i circuiti accoppiati precedentemente trattati così si possono risolvere gli altri di maggior complessità. Si supponga ad esempio che siano assegnati i circuiti accoppiati di fig. 51.9. Il circuito primario sia variamente costituito e termini tra i nodi A e B con il ramo inducente R_1L_1 accoppiato con il coefficiente di mutua induzione M con il circuito secondario. Facendo astrazione dalla parte del circuito primario che sta alla sinistra di AB ed indicando con $\overline{V}_0$ la tensione

effettivamente presente tra i due nodi considerati, si possono applicare al ramo induttore del primario ed al secondario le stesse relazioni 51.4 già viste prece-

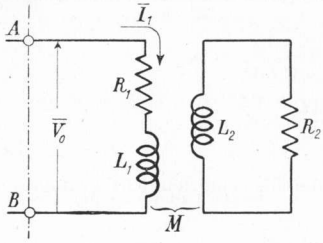


Fig. 51.9 – Esempio di applicazione a circuiti complessi delle proprietà relative ai circuiti accoppiati semplici.

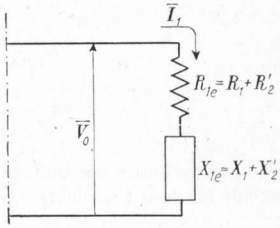


Fig. 51.10 – Circuito equivalente primario dei due circuiti accoppiati di fig. 51.9.

dentemente. Il ramo del primario inducente si trasformerà quindi nel ramo equivalente come indicato in fig. 51.10. Dopo avere eseguito questa trasformazione, considerando il primario nel suo complesso si potrà determinare il valore di $\overline{V}_0$ e quindi l'intensità di corrente $\overline{I}_1$. Per calcolare quindi l'intensità di corrente nel circuito secondario $\overline{I}_2$ sarà sufficiente calcolare la f.e.m. di mutua induzione che si determina nel secondario: $\overline{E}_2 = -j\omega M\overline{I}_1$ e dividere la stessa per l'impedenza del secondario: $\overline{I}_2 = \overline{E}_2/\overline{Z}_2$ (fig. 51.11).

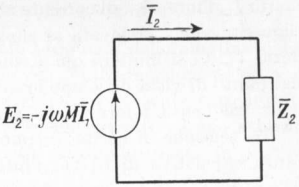


Fig. 51.11 – Circuito equivalente secondario dei due circuiti accoppiati di fig. 51.9.

52. – *Circuiti oscillatori accoppiati in regime sinusoidale.*

Nel paragrafo precedente è stato accennato che i circuiti oscillatori accoppiati costituiscono un caso particolare, d'altronde molto importante nella tecnica elettronica, dei circuiti accoppiati.

Lo studio completo di questi circuiti oscillatori accoppiati soggetti ad oscillazioni forzate è piuttosto vasto. Qui si svilupperà qualche caso particolare, limitandosi alle deduzioni di maggior evidenza e più interessanti.

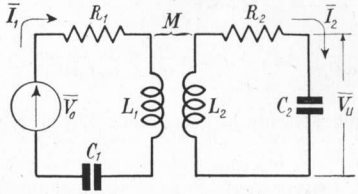


Fig. 52.1 – Circuiti oscillatori accoppiati.

Siano dati i due circuiti oscillatori accoppiati rappresentati in fig. 52.1. Nel caso più generale essi saranno singolarmente accordati su una propria pulsazione ω_{01} ed ω_{02}, ed avranno

ciascuno un proprio coefficiente di risonanza ε_1 ed ε_2. Qui si limiterà lo studio a due circuiti oscillatori accordati sulla medesima pulsazione ed aventi il medesimo coefficiente di risonanza, soddisfacenti quindi alla duplice condizione:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0$$

52.1

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_0 L_1}{R_1} = \varepsilon_2 = \frac{\omega_0 L_2}{R_2} = \varepsilon \, .$$

È facile verificare che due circuiti soddisfano alle condizioni 52.1 quando sono uguali tra loro i seguenti rapporti:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1} \, .$$

Le limitazioni precedentemente imposte non tolgono quasi nulla alla generalità della trattazione seguente in quanto nella pratica esse risultano verificate nella maggior parte dei casi.

Le grandezze che interessa determinare sono l'intensità di corrente al primario $\overline{I}_1$, l'intensità di corrente al secondario $\overline{I}_2$ e la tensione di uscita che ordinariamente viene prelevata ai capi del condensatore presente nel circuito secondario $\overline{V}_u$. Ci si limiterà qui a considerare quest'ultima, che è la più importante dal punto di vista delle applicazioni, e si determinerà come essa varia al variare della frequenza f fornita dal generatore.

La tensione di uscita $\overline{V}_u$ può essere determinata come prodotto della reattanza capacitiva di C_2 per l'intensità di corrente al secondario:

52.2 $$\overline{V}_u = -j \frac{1}{\omega C_2} \overline{I}_2 \, .$$

Sostituendo ora nella relazione precedente il valore di $\overline{I}_2$ dato dalla 51.16 si ricava:

52.3 $$\overline{V}_u = -j \frac{1}{\omega C_2} \frac{-j\omega M \overline{V}_0}{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \omega^2 M^2} = \frac{-M}{C_2 \overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \omega^2 M^2 C_2} \overline{V}_0 \, .$$

Si renda esplicita l'impedenza del primario nel seguente modo:

$$\overline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = R_1 + j\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 L_1 \omega C_1}\right)$$

avendo posto in evidenza $\omega_0 L_1$. Tenendo presente la prima delle 52.1 la relazione precedente diviene:

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = R_1 + j\omega_0 L_1 \chi$$

avendo indicato con $\chi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$ la *dissonanza*. Si può ancora scrivere:

$$\overline{Z}_1 = R_1\left(1 + j\frac{\omega_0 L_1}{R_1}\chi\right)$$

che per la seconda delle 52.1 si trasforma nella:

52.4 $$\overline{Z}_1 = R_1(1 + j\varepsilon\chi) .$$

Analogamente si può ricavare:

52.5 $$\overline{Z}_2 = R_2(1 + j\varepsilon\chi) .$$

Dalla 52.3 si può ottenere il rapporto adimenzionale tensione d'uscita su tensione di ingresso operando contemporaneamente le sostituzioni 52.4 e 52.5 e la $M = k\sqrt{L_1 L_2}$:

$$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{-k\sqrt{L_1 L_2}}{\frac{\omega_0^2}{\varepsilon^2} L_1 L_2 C_2 (1 + j\varepsilon\chi)^2 + \omega^2 k^2 L_1 L_2 C_2} .$$

Essendo $L_2 C_2 = 1/\omega_0^2$ si può semplificare il primo termine a denominatore della frazione precedente ed anche il secondo ponendo per approssimazione $\omega^2/\omega_0^2 \simeq 1$ (l'errore che si commette con questa approssimazione è veramente trascurabile se interessano soltanto le pulsazioni che stanno in un ristretto campo attorno alla pulsazione su cui sono accordati i due circuiti accoppiati, come in pratica avviene). Si ottiene quindi:

52.6 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{-k\sqrt{L_1 L_2}}{\frac{L_1}{\varepsilon^2}(1 + j\varepsilon\chi)^2 + k^2 L_1}$$

e dividendo numeratore e denominatore per L_1 e sviluppando il quadrato che compare a denominatore:

52.7 $$\frac{\overline{V}_u}{\overline{V}_0} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\frac{1}{\varepsilon^2} + k^2 - \chi^2 + j2\frac{\chi}{\varepsilon}}$$

e passando al modulo:

52.8 $$\frac{V_u}{V_0} = \frac{k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + k^2 - \chi^2\right)^2 + 4\frac{\chi^2}{\varepsilon^2}}} .$$

La 52.8 dice come varia il rapporto V_u/V_0 in funzione della dissonanza χ.

53. – *Curve di risonanza dei circuiti oscillatori accoppiati.*

La traduzione grafica della 52.8 dà le curve di risonanza dei circuiti oscillatori accoppiati, una per ogni valore del coefficiente di accoppiamento k. Occorrerà riportare in ascisse la dissonanza χ ed in ordinate il rapporto adimensionale V_u/V_0.

Si cominci intanto col determinare per quali valori della dissonanza il rapporto V_u/V_0 assume valori massimi o minimi. A questo scopo occorre osservare che i massimi e i minimi si avranno per quei valori della dissonanza che rendono rispettivamente minimo o massimo il radicando che compare a denominatore della 52.8. Occorre ricercare quindi quei valori della dissonanza che annullano la derivata del suddetto radicando.

Derivando ed uguagliando a zero si ottiene:

$$2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + k^2 - \chi^2\right)(-2\chi) + 8\frac{\chi}{\varepsilon^2} = 0$$

da cui semplificando e ponendo in evidenza 4χ:

$$4\chi\left(k^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} - \chi^2\right) = 0$$

che si può scindere nelle:

53.1
$$\chi = 0$$
$$k^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} - \chi^2 = 0$$

Dalla seconda delle 53.1 si ottiene $\chi^2 = k^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Quindi, riepilogando, i massimi ed i minimi del rapporto V_u/V_0 andranno ricercati tra i seguenti valori della dissonanza:

53.2
$$\chi = 0$$
$$\chi = \sqrt{k^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}$$
$$\chi = -\sqrt{k^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}.$$

Si nota subito che nel caso particolare in cui sia $k = 1/\varepsilon$ le tre espressioni 53.2 forniscono un unico massimo, essendo coincidenti per $\chi = 0$.

Quel particolare valore del coefficiente di accoppiamento che è uguale al reciproco del coefficiente di risonanza di ciascuno dei due circuiti oscillatori

accoppiati si dice *coefficiente di accoppiamento critico*:

53.3 $$k_c = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Se il coefficiente di accoppiamento effettivo tra i due circuiti è proprio uguale a k_c, l'*accoppiamento* si dice *critico*. Si dice invece *supercritico* o *sottocritico* se il coefficiente di accoppiamento è rispettivamente maggiore o minore di k_c.

Operando la sostituzione indicata dalla 53.3 la 52.8 diviene:

53.4 $$\frac{V_u}{V_0} = \frac{k\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{(k^2 + k_e^2 - \chi^2)^2 + 4k_e^2\chi^2}}$$

mentre le condizioni di massimo o minimo 53.2 divengono:

53.5 $$\begin{aligned} \chi &= 0 \\ \chi &= \sqrt{k^2 - k_e^2} \\ \chi &= -\sqrt{k^2 - k_e^2}\,. \end{aligned}$$

Per vedere se le 53.5 corrispondono a dei massimi o a dei minimi conviene studiare separatamente i tre casi:

$k = k_c$; accoppiamento critico
$k > k_c$; accoppiamento supercritico
$k < k_c$; accoppiamento sottocritico.

a) Quando l'accoppiamento è critico le 53.5 coincidono nell'unico valore $\chi = 0$. La derivata seconda del radicando del denominatore dà $12\chi^2$ che si annulla per $\chi = 0$; occorre quindi passare alla derivata terza 24χ che si annulla anch'essa per $\chi = 0$ ed infine alla derivata quarta che risulta 24 e quindi maggiore di zero. Il denominatore della 53.4 presenta quindi un minimo per $\chi = 0$ quando l'accoppiamento è critico; il rapporto V_u/V_0 presenta di conseguenza un massimo il cui valore si ricava dalla 53.4, ponendo $k = k_c$ e $\chi = 0$. Risulta:

53.6 $$\left(\frac{V_u}{V_0}\right)_{\max} = \frac{\sqrt{L_2/L_1}}{2k_c}.$$

La curva di risonanza corrispondente avrà un andamento come quello indicato in fig. 53.1.

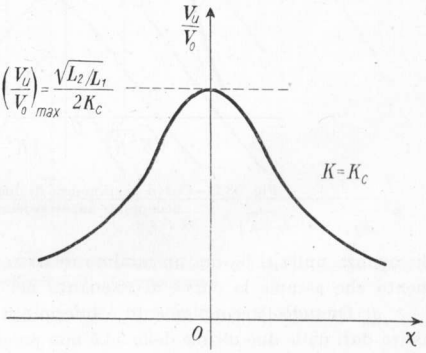


Fig. 53.1 – Curva di risonanza di due circuiti oscillatori accoppiati criticamente.

La curva è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate in quanto nella 53.4 l'ascissa χ compare al quadrato. Si osservi che il massimo si ha per dissonanza zero, ossia quando la frequenza del generatore di tensione presente nel primario coincide con la frequenza di risonanza propria di ciascuno dei due circuiti accoppiati $f = f_0$.

b) Quando l'accoppiamento è superiore a quello critico, la derivata seconda del radicando della 53.4 dà $4(k_c - k^2) + 12\chi^2$. Per $\chi = 0$ essa risulta negativa e ciò significa che il denominatore della 53.4 presenta un massimo e quindi è minimo il rapporto V_u/V_0 che in questo caso risulta:

53.7 $$\left(\frac{V_u}{V_0}\right)_{\min} = \frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{k^2 + k_e^2}\,.$$

Invece per $\chi = \pm\sqrt{k^2 - k_e^2}$ la derivata seconda in esame risulta positiva. Corrisponde quindi ad un minimo del denominatore della 53.4 e ad un massimo del rapporto V_u/V_0. Se si calcola il valore di questo massimo ponendo $\chi^2 = k^2 - k_e^2$ si trova ancora il valore dato dalla 53.6. Quindi il massimo del rapporto V_u/V_0 che si può ottenere con un accoppiamento superiore all'accoppiamento critico ha lo stesso valore che si può ottenere con accoppiamento critico; mentre però in quest'ultimo caso il massimo si ha per dissonanza nulla, nel caso dell'accoppiamento supercritico si hanno due massimi uguali per una dissonanza positiva e per una negativa dello stesso valore assoluto $\sqrt{k^2 - k_e^2}$, mentre per

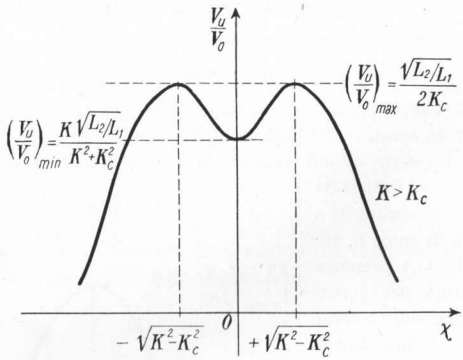


Fig. 53.2 – Curva di risonanza di due circuiti oscillatori accoppiati supercriticamente.

dissonanza nulla si ha ora un minimo relativo. La fig. 53.2 rappresenta l'andamento che assume la curva di risonanza nel caso ora esaminato.

c) Quando l'accoppiamento è inferiore a quello critico, i valori di dissonanza dati dalle due ultime delle 53.5 non possono essere presi in considerazione perché corrispondenti a dissonanze immaginarie prive di significato fisico. Rimane $\chi = 0$ per la quale la derivata seconda del radicando a denominatore della

53.4 risulta positiva. Ciò corrisponde ad un massimo di V_u/V_0 che è dato da:

$$\left(\frac{V_u}{V_0}\right)_{\max-\mathrm{rel}} = \frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{k^2 + k_c^2}\,. \tag{53.8}$$

L'andamento della corrispondente curva di risonanza è indicato in fig. 53.3.

Nella 53.8 si è denominato massimo relativo quello corrispondente ad un accoppiamento sottocritico. Infatti esso, pur essendo il massimo che si ottiene per un assegnato valore di $k < k_c$, risulta inferiore al massimo che si può ottenere facendo aumentare k fino a uguagliare o superare k_c. Il valore dato dalla 53.8 è infatti minore del valore fornito dalla 53.6 che quindi prende il nome di massimo assoluto e non può essere superato comunque si aumenti k al di sopra di k_c (1).

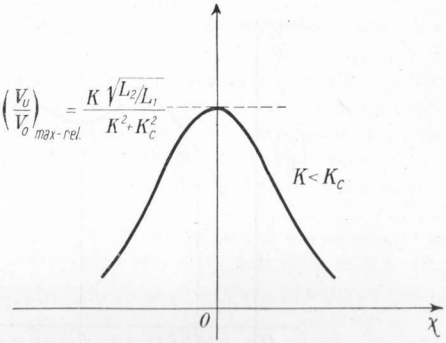


Fig. 53.3 – Curva di risonanza di due circuiti oscillatori accoppiati subcriticamente.

Le curve di risonanza di fig. 53.4 corrispondenti a diversi valori di k mettono in luce quanto fin qui detto.

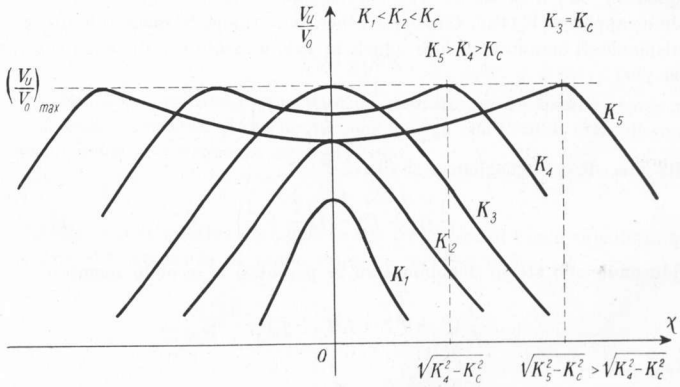


Fig. 53.4 – Confronto tra curve di risonanza di due circuiti oscillatori accoppiati per diversi valori del coefficiente di accoppiamento.

(1) Si può dimostrare facilmente quanto affermato derivando il secondo membro della 53.8 rispetto a k. Si ottiene:

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{k^2 + k_c^2}\right) = \frac{\sqrt{L_2/L_1}}{(k^2 + k_c^2)^2}(k_c^2 - k^2)\,. \tag{53.9}$$

Le curve di risonanza finora riportate recano in ascisse la dissonanza χ e come già osservato precedentemente risultano simmetriche rispetto all'asse delle ordinate corrispondente a dissonanza nulla. Se sulle ascisse si riporta invece la frequenza, la simmetria rispetto all'ordinata passante per l'ascissa f_0 non è verificata. Si può determinare (fig. 53.5) la relazione esistente tra la f_0 e due

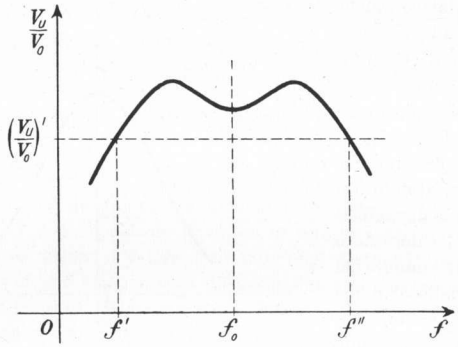


Fig. 53.5 – Determinazione della relazione esistente tra la frequenza f_0 su cui sono accordati i due circuiti oscillatori e le frequenze f' ed f'' che danno la medesima risposta.

frequenze f' ed f'' una minore e l'altra maggiore di f_0 per le quali si abbia il medesimo rapporto $(V_u/V_0)'$. Ciò si verificherà naturalmente quando le dissonanze corrispondenti saranno tra loro uguali in valore assoluto e di segno contrario, ossia per:

$$\frac{f'}{f_0} - \frac{f_0}{f'} = -\left(\frac{f''}{f_0} - \frac{f_0}{f''}\right).$$

Dalla precedente uguaglianza si ricava:

$$\frac{1}{f_0}(f' + f'') = f_0\left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{f''}\right)$$

e riducendo allo stesso denominatore la parentesi a secondo membro:

$$\frac{1}{f_0}(f' + f'') = f_0(f' + f'')\frac{1}{f' \times f''}$$

da cui infine:

53.10 $$f_0^2 = f'f''.$$

Dalla 53.9 si constata che essendo la derivata positiva per $k < k_c$ l'espressione data dalla 53.8 è crescente fino a quando $k = k_c$. Si può ancora dedurre che se k supera k_c la derivata precedente diviene negativa e quindi il valore dato dal secondo membro della 53.8, che coincide con la 53.7, diviene un minimo e decresce con il crescere di k.

Si è in tal modo ottenuto la stessa relazione valida per un circuito risonante semplice: la frequenza di risonanza è media proporzionale tra due frequenze cui corrisponde la medesima risposta.

54. – *Banda passante dei circuiti oscillatori accoppiati.*

Si dicono *frequenza di taglio inferiore* f_1 e *frequenza di taglio superiore* f_2 di due circuiti oscillatori accoppiati quelle frequenze, rispettivamente inferiore e superiore alla frequenza f_0 su cui sono accordati entrambi i circuiti, per le quali il rapporto V_u/V_0 risulta uguale al valor massimo (V_u/V_0) diviso per $\sqrt{2}$.

L'intervallo di frequenze comprese tra le due frequenze di taglio si dice *banda passante* e la sua ampiezza è data da $B = f_2 - f_1$.

Si cominci dal caso corrispondente all'accoppiamento critico per il quale cioè $k = k_c$ e quindi $k/k_c = 1$. Si imponga che V_u/V_0 dato dalla 53.4, e semplificato ponendo $k = k_c$, sia uguale a $(V_u/V_0)_{\max}$ dato dalla 53.6 diviso per $\sqrt{2}$:

$$\frac{k_c\sqrt{L_2/L_1}}{\sqrt{4k_c^4 + \chi^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{L_2/L_1}}{2k_c}$$

da cui semplificando

$$\sqrt{4k_c^4 + \chi^4} = \sqrt{2 \cdot 2k_c^2}$$

ed elevando al quadrato:

$$4k_c^4 + \chi^4 = 8k_c^4$$

e quindi:

$$\chi^2 = \pm\, 2k_c^2\,.$$

La soluzione negativa è senz'altro da scartare perché implicherebbe per χ un valore immaginario. Si ottiene di conseguenza che i valori della dissonanza corrispondenti alle frequenze di taglio sono:

54.1 $$\chi = \pm\sqrt{2}\,k_c\,.$$

La dissonanza positiva corrisponde alla frequenza di taglio superiore, quella negativa alla frequenza di taglio inferiore, per cui si ha:

54.2 $$\frac{f_2}{f_0} - \frac{f_0}{f_2} = \sqrt{2}\,k_c$$

$$\frac{f_1}{f_0} - \frac{f_0}{f_1} = -\sqrt{2}\,k_c\,.$$

Moltiplicando entrambi i membri della prima uguaglianza per $f_2 f_0$ ed entrambi i membri della seconda per $f_1 f_0$, si ottiene:

$$f_2^2 - f_0^2 = \sqrt{2}\,k_c f_2 f_0$$

$$f_1^2 - f_0^2 = -\sqrt{2}\,k_c f_1 f_0$$

e sottraendo membro a membro:

$$f_2^2 - f_1^2 = \sqrt{2}\, k_c f_0 (f_2 + f_1)$$

e dividendo ambo i membri per $(f_2 + f_1)$ e ponendo $f_2 - f_1 = B$:

54.3 $$B = \sqrt{2}\, k_c f_0 \qquad (k = k_c)\,.$$

Si passi ora al caso dell'accoppiamento supercritico per il quale $k > k_c$ e quindi $k/k_c > 1$. Qui occorre fare una osservazione preliminare prima di passare alla determinazione dell'ampiezza della banda passante. Si è visto nel paragrafo precedente che aumentando il coefficiente di accoppiamento oltre il valore critico il minimo relativo compreso tra i due massimi, corrispondente a dissonanza nulla, va diminuendo. Si corre quindi rischio aumentando eccessivamente k oltre k_c, e quindi k/k_c oltre 1, di trovarsi nella situazione indicata in fig. 54.1,

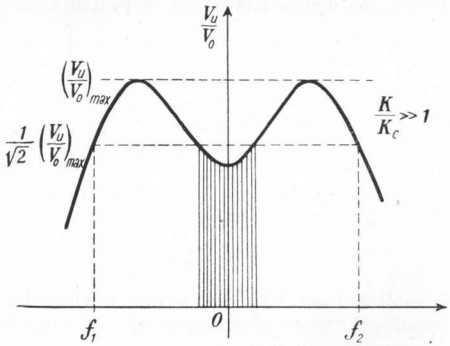


Fig. 54.1 – Determinazione del massimo rapporto k/k_c che consente di evitare una *banda oscura* al centro della banda passante di due circuiti oscillatori accoppiati.

nella quale a dissonanza nulla o poco diversa da zero corrispondono valori del rapporto V_u/V_0 inferiori al valor massimo diviso $\sqrt{2}$. Questa situazione (che naturalmente si può verificare soltanto per $k/k_c > 1$) è ordinariamente una situazione sfavorevole. Si tratta quindi di determinare fino a quale limite massimo si può spingere il rapporto k/k_c perché la predetta situazione non si verifichi [1].

---

[1] Il limite sarà dato dall'uguaglianza tra $(V_u/V_0)_{min}$ dato dalla 53.7 e $(V_u/V_0)_{max}$ dato dalla 53.6 diviso per $\sqrt{2}$:

54.4 $$\frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{k_c^2 + k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{L_2/L_1}}{2k_c}\,.$$

Si trova:

54.6 $$\frac{k}{k_c} \leq \sqrt{2} + 1 = 2{,}4\,142 \; .$$

Si può ora passare alla determinazione della banda passante tenendo conto della duplice limitazione:

$$1 \lessgtr \frac{k}{k_c} \lessgtr \sqrt{2} + 1 \; .$$

Dovrà essere:

54.7 $$\frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{\sqrt{(k^2 + k_c^2 - \chi^2)^2 + 4k_c^2\chi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{L_2/L_1}}{2k_c}$$

da cui semplificando, elevando al quadrato ed ordinando secondo le potenze decrescenti di χ^2:

$$\chi^4 - 2\chi^2(k^2 - k_c^2) + (k^2 + k_c^2)^2 - 8k_c^2k^2 = 0$$

e risolvendo rispetto a χ^2 si ottiene (dopo aver posto in evidenza k_c^2):

$$\chi^2 = k_c^2\left[\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 \pm 2\frac{k}{k_c}\right] .$$

La soluzione con il segno meno è da scartare in quanto per k/k_c limitato come sopra darebbe χ^2 negativo e quindi dissonanza χ immaginaria. Accettando solo la soluzione positiva ed estraendo la radice quadrata si può ricavare:

54.8 $$\chi = \pm k_c\sqrt{\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 + 2\frac{k}{k_c}}$$

Di qui si ricava:

$$k_c^2 + k^2 = 2\sqrt{2}kk_c$$

e dividendo entrambi i membri per k_c^2 ed ordinando secondo le potenze decrescenti di k/k_c:

$$\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 2\sqrt{2}\frac{k}{k_c} + 1 = 0 \; .$$

Risolvendo la precedente equazione di secondo grado si ottiene:

54.5 $$\frac{k}{k_c} = \sqrt{2} \pm 1 \; .$$

Dei due valori forniti dalla 54.5 interessa solo il valore massimo e quindi per evitare l'inconveniente di cui sopra deve essere verificata la 54.6. L'altro valore fornito dalla 54.5 $k/k_c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142$ corrisponde al minimo valore al di sotto del quale per accoppiamento inferiore a quello critico il massimo relativo scende al disotto del massimo assoluto, che si potrebbe ottenere per $k \geq k_c$, diviso per $\sqrt{2}$.

e ponendo

54.9 $$A = \sqrt{\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 + 2\frac{k}{k_c}} \, .$$

si può scrivere:

54.10 $$\chi = \pm A k_c \, .$$

Per trovare la banda passante è ora sufficiente sdoppiare la 54.10 scrivendo:

54.11 $$\begin{aligned} \frac{f_2}{f_0} - \frac{f_0}{f_2} &= A k_c \\ \frac{f_1}{f_0} - \frac{f_0}{f_1} &= - A k_c \, . \end{aligned}$$

Si constata che le 54.11 sono identiche alle 54.2 tranne la sostituzione di $\sqrt{2}$ con A. L'ampiezza della banda passante sarà quindi ancora data da una espressione analoga alla 54.3 in cui al posto di $\sqrt{2}$ compare A:

54.12 $$B = A k_c f_0 \qquad (k > k_c) \, .$$

Si passi infine alla ricerca della banda passante per $k < k_c$ e quindi $k/k_c < 1$. Procedendo come nei casi precedenti si impone:

54.13 $$\frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{\sqrt{(k^2 + k_c^2 - \chi^2)^2 + 4k_c^2\chi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k\sqrt{L_2/L_1}}{k^2 + k_c^2} \, .$$

Semplificando, elevando al quadrato ed ordinando secondo le potenze decrescenti di χ^2 si giunge alla:

$$\chi^4 - 2(k^2 - k_c^2)\chi^2 - (k^2 + k_c^2)^2 = 0 \, .$$

Da quest'ultima relazione risolvendo rispetto a χ^2 dopo aver posto k_c^2 in evidenza si ottiene:

$$\chi^2 = k_c^2 \left\{ \left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{2\left[\left(\frac{k}{k_c}\right)^4 + 1\right]} \right\} .$$

La soluzione col segno meno è senz'altro da scartare perché per $k/k_c < 1$, χ^2 risulterebbe negativa e quindi χ immaginaria.

Si può allora ricavare:

54.14 $$\chi = \pm k_c \sqrt{\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[\left(\frac{k}{k_c}\right)^4 + 1\right]}}$$

e ponendo:

54.15 $$A = \sqrt{\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[\left(\frac{k}{k_c}\right)^4 + 1\right]}}$$

si ottiene infine:

54.16 $$\chi = \pm A k_c \, .$$

La banda passante risulta ancora data dalla:

54.17 $$B = A k_c f_0 \qquad (k < k_c) \, .$$

Concludendo, per i circuiti oscillatori accoppiati esaminati, l'ampiezza della banda passante è in ogni caso data dalla 54.17 nella quale però il coefficiente A che è una funzione del rapporto k/k_c assume il valore $\sqrt{2}$ per $k/k_c = 1$; assume invece il valore dato dalla 54.9 per $k/k_c > 1$ e quello dato dalla 54.15 per $k/k_c < 1$ (1).

55. – *Filtri di banda.*

Si è visto come si presentano le curve di risonanza di due circuiti oscillatori accoppiati: per un certo intervallo di frequenze, nell'intorno della frequenza su cui sono accordati i due circuiti singolarmente, la curva di risonanza, specialmente per accoppiamento superiore all'accoppiamento critico, si presenta pianeggiante per poi scendere piuttosto ripidamente. Si sfrutta questa caratteristica dei circuiti oscillatori accoppiati per usarli come *filtri di banda*. Il comportamento ideale di un filtro di banda sarebbe quello indicato in fig. 55.1: un certo intervallo di frequenze viene trattato in modo uniforme, mentre tutte le altre non danno risposta. Si noti che a questa condizione si avvicina molto meglio un sistema di due circuiti oscillatori accoppiati anziché un circuito oscillatorio semplice (2).

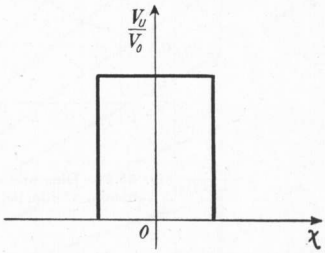


Fig. 55.1 – Risposta di un filtro di banda ideale.

(1) Si osservi pure che la 54.17 è analoga all'espressione che dà la banda passante per i circuiti risonanti semplici $B = f_0/\varepsilon$; difatti nel caso dei circuiti accoppiati è proprio $k_c = 1/\varepsilon$. Le due formule differiscono per il valore del coefficiente A che per i circuiti risonanti semplici risulta uguale ad uno.

(2) Per convincersene occorrerebbe calcolare la pendenza della curva di risonanza in entrambi i casi in corrispondenza delle frequenze di taglio: si constata che tale pendenza è maggiore per i circuiti oscillatori accoppiati.

Dalla 54.17 si rivela inoltre che la banda passante di due circuiti oscillatori accoppiati è maggiore, a parità di frequenza di accordo dei circuiti, di quella che compete ad un circuito risonante semplice [1].

La curva di fig. 55.2 può essere di aiuto nel calcolo dei filtri di banda. Essa riporta in funzione del rapporto k/k_c, il rapporto tra la banda passante e la frequenza f_0. Quest'ultimo rapporto è in iscala avente k_c come unità di misura e potrebbe quindi rappresentare anche il coefficiente A in funzione di k/k_c.

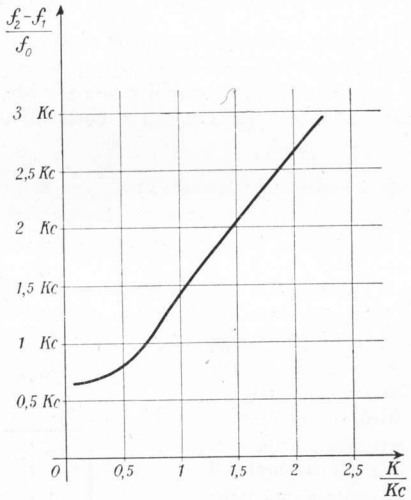


Fig. 55.2 – Diagramma per il calcolo dei filtri di banda, valido per qualsiasi valore di k_c.

In fig. 55.3 sempre in funzione di k/k_c è riportato il rapporto tra la banda passante e la frequenza f_0 per diversi valori di k_c scelti tra gli estremi 0,005 e 0,1 corrispondenti ai valori 200 e 10 tra cui solitamente varia il coefficiente di risonanza ε.

Qualora si vogliano determinare le due frequenze di taglio di un filtro di banda, occorre risolvere il sistema formato dalla 54.17 e dalla 53.10. Tuttavia se la risonanza è piuttosto spinta (B molto minore di f_0) come avviene in pratica, si può ritenere la frequenza di accordo dei due circuiti f_0 media aritmetica tra

---

[1] Ciò è vero finché il coefficiente A è maggiore di uno (il che si verifica finché k/k_c non scende approssimativamente al di sotto di 0,67).

le due frequenze di taglio e quindi:

$$f_1 \simeq f_0 - \frac{B}{2}$$

55.1

$$f_2 \simeq f_0 + \frac{B}{2}$$

come per i circuiti risonanti semplici.

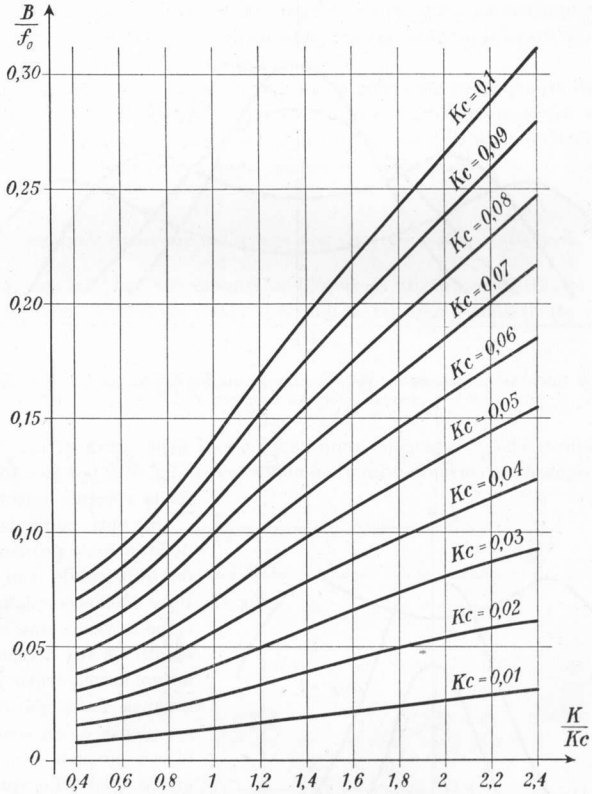


Fig. 55.3 – Diagramma per il calcolo dei filtri di banda, valido per i valori indicati di k_c.

56. – *Complementi sui circuiti oscillatori accoppiati.*

Con procedimento analogo a quello seguito nei paragrafi 52 e 53 per determinare la curva di risonanza corrispondente alla tensione di uscita, si possono trovare, per ogni valore del coefficiente di accoppiamento k o del suo rapporto al coefficiente di accoppiamento critico k_c, gli andamenti sia della corrente primaria che della corrente secondaria in funzione della dissonanza χ.

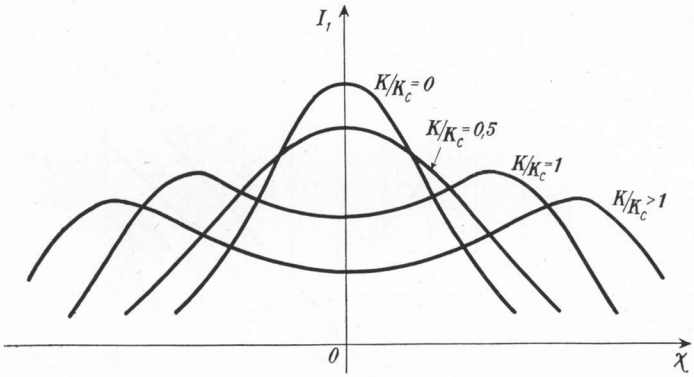


Fig. 56.1 – Intensità di corrente nel circuito primario di due circuiti oscillatori accoppiati per diversi valori del rapporto k/k_c.

I risultati che si ottengono sono compendiati nelle curve di fig. 56.1 per quanto riguarda la corrente primaria e nelle curve di fig. 56.2 per quanto riguarda la corrente secondaria.

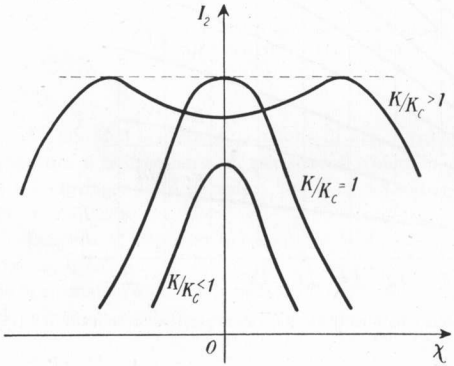


Fig. 56.2 – Intensità di corrente nel circuito secondario di due circuiti oscillatori accoppiati per diversi valori del rapporto k/k_c.

Si noti come la curva della corrente primaria si vada abbassando con il crescere dell'accoppiamento e come avvenga uno sdoppiamento del suo massimo e relativo insellamento per dissonanza nulla già in corrispondenza di un coefficiente di accoppiamento minore di quello critico. Per quanto riguarda invece la corrente secondaria il comportamento non differisce quasi per nulla da quello della tensione di uscita.

Finora si sono considerati unicamente circuiti oscillatori accoppiati aventi lo stesso coefficiente di risonanza ed accordati separatamente sulla medesima frequenza. Se i due circuiti presentano un diverso coefficiente di risonanza, i due massimi compaiono soltanto quando il coefficiente di accoppiamento ha superato alquanto il coefficiente di accoppiamento critico definito in questo caso dalla:

56.1 $$k_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

essendo ε_1 ed ε_2 i coefficienti di risonanza rispettivamente del primario e del secondario. Inoltre i valori dei due massimi che si ottengono per accoppiamento sufficientemente superiore all'accoppiamento critico risultano inferiori al valore massimo corrispondente ad un unico massimo.

Se invece i due circuiti sono singolarmente accordati su frequenze diverse, le curve di risonanza divengono asimmetriche. Del tutto irregolari poi si presentano le curve stesse quando i due circuiti né hanno il medesimo coefficiente di risonanza né sono accordati sulla medesima frequenza.

57. – *Vari metodi di accoppiamento tra due circuiti oscillatori.*

L'accoppiamento tra due circuiti oscillatori (e anche non oscillatori) può avvenire in modi diversi da quello per mutua induzione considerato finora.

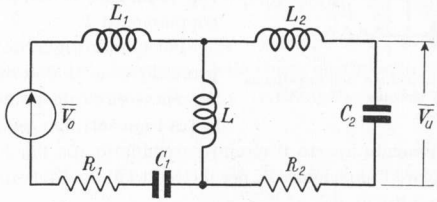


Fig. 57.1 – Circuiti oscillatori accoppiati induttivamente.

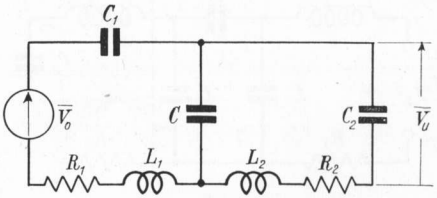


Fig. 57.2 – Circuiti oscillatori accoppiati capacitivamente.

Ad esempio tra i due circuiti oscillatori di fig. 57.1 l'accoppiamento avviene per mezzo dell'induttanza comune L; mentre per i circuiti di fig. 57.2 l'accop-

piamento, di tipo capacitivo, avviene tramite il condensatore C. Tra i due circuiti infine di fig. 57.3 l'accoppiamento, ancora del tipo capacitivo, avviene per mezzo del gruppo di condensatori C_a, C e C_b (1).

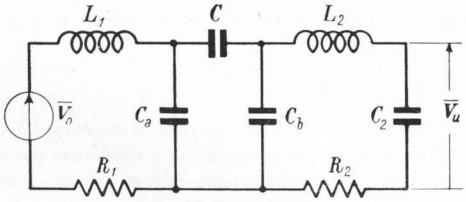


Fig. 57.3 – Altro tipo di accoppiamento capacitivo tra circuiti oscillatori.

Quanto visto per i circuiti oscillatori accoppiati per mutua induzione può essere esteso ai circuiti oscillatori variamente accoppiati. Si tratta di volta in volta di determinare il valore dell'impedenza del circuito primario $\overline{Z}_p$, dell'impedenza del circuito secondario $\overline{Z}_s$, del coefficiente M che sostituisce quello di mutua induzione e del coefficiente di accoppiamento k.

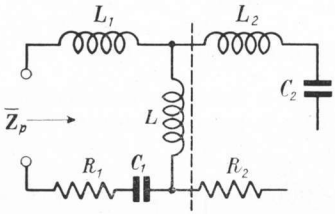


Fig. 57.4 – Determinazione dell'impedenza del primario del circuito di fig. 57.1.

Per quanto riguarda l'impedenza del primario essa si determina eliminando il generatore e calcolandola o misurandola tra i morsetti cui quello era collegato, considerando o tenendo aperto il circuito secondario. La fig. 57.4 indica come si dovrebbe calcolare l'impedenza $\overline{Z}_p$ per il circuito di fig. 57.1; mentre la fig. 57.5 si riferisce al circuito di fig. 57.3.

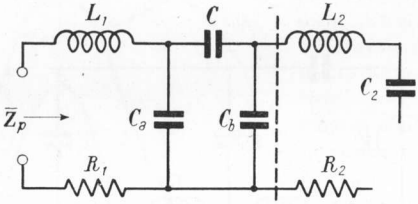


Fig. 57.5 – Determinazione dell'impedenza del primario del circuito di fig. 57.3.

(1) I circuiti delle figg. 57.1, 57.2 e 57.3 sono stati disegnati con l'uscita sul condensatore C_2 per una maggior analogia con i circuiti oscillatori accoppiati per mutua induzione precedentemente trattati; possono però verificarsi casi diversi.

Per determinare l'impedenza del secondario occorre aprire il primario e vedere $\overline{Z}_s$ come indicato in fig. 57.6 che fa ancora riferimento al circuito di fig. 57.3.

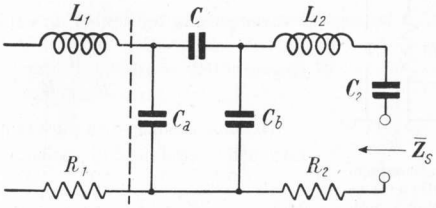


Fig. 57.6 – Determinazione dell'impedenza del secondario del circuito di fig. 57.3.

Ricordando che è $\overline{E}_2 = -j\omega M\overline{I}_p$, M si determina come rapporto: $M = \overline{E}_2/(-j\omega\overline{I}_p)$, essendo $\overline{I}_p$ la corrente del primario ed $\overline{E}_2$ la conseguente f.e.m. che si determina nel secondario quando questo è aperto.

Infine ricordando che per i circuiti accoppiati per mutua induzione è:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}}$$

si deduce che il fattore di accoppiamento è il rapporto tra la reattanza comune e la media geometrica delle reattanze, della stessa specie della reattanza comune, dei due circuiti. Per il circuito di fig. 57.1 risulterà ad esempio:

$$k = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega(L_1 + L) \cdot \omega(L_2 + L)}} = \frac{L}{\sqrt{(L_1 + L) \cdot (L_2 + L)}}$$

mentre per quello di fig. 57.3 sarà:

$$k = \frac{\dfrac{1}{\omega}\dfrac{C}{C + C_b}\dfrac{1}{\left(C_a + \dfrac{CC_b}{C + C_b}\right)}}{\sqrt{\dfrac{1}{\omega\left(C_a + \dfrac{CC_b}{C + C_b}\right)} \cdot \dfrac{1}{\omega\left(C_b + \dfrac{CC_a}{C + C_a}\right)}}} = \frac{C}{\sqrt{(C + C_b)(C + C_a)}}.$$

58. – *Condizione di massimo trasferimento di potenza.*

Sia dato il circuito di fig. 58.1 in cui agisce il generatore di tensione V_0, indifferentemente continua od alternata (in quest'ultimo caso V_0 rappresenta il valore efficace), avente resistenza interna R_i; sia R la resistenza di carico.

Al variare di questa varia naturalmente l'intensità di corrente nel circuito:

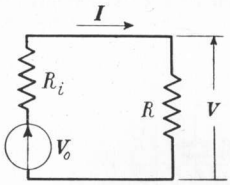


Fig. 58.1 – Circuito comprendente generatore di tensione con resistenza interna e resistenza di carico.

58.1 $$I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

e varia pure la tensione V ai capi del carico:

58.2 $$V = \frac{R}{R_i + R} V_0 \, .$$

Di conseguenza varia pure la potenza P_u utilizzata nella resistenza di carico:

58.3 $$P_u = VI = \frac{R}{(R_i + R)^2} V_0^2 \, .$$

Aumentando la resistenza di carico R la tensione V aumenta mentre l'intensità di corrente I diminuisce; non è quindi variabile sempre nello stesso verso la potenza P_u. Questa invece presenta un massimo per un valore di R facilmente determinabile. È sufficiente a questo scopo eseguire la derivata di P_u espressa dalla 58.3 ed uguagliare a zero. Si ottiene:

$$\frac{dP_u}{dR} = \frac{(R_i + R)^2 - 2R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} V_0^2$$

ed uguagliando a zero il numeratore si ricava che il massimo trasferimento di potenza dal generatore all'utilizzatore si ha per

58.4 $$R = R_i \, ,$$

ossia quando la resistenza dell'utilizzatore uguaglia la resistenza interna del generatore. È chiaro che in questo caso la potenza dissipata nella resistenza interna del generatore è esattamente uguale alla potenza trasferita al carico e quindi il rendimento del circuito è solo del 50 %; tuttavia se si cerca di aumentare il rendimento (aumentando la resistenza di carico) la potenza erogata diminuisce. La fig. 58.2 dà l'andamento di P_u in funzione di R.

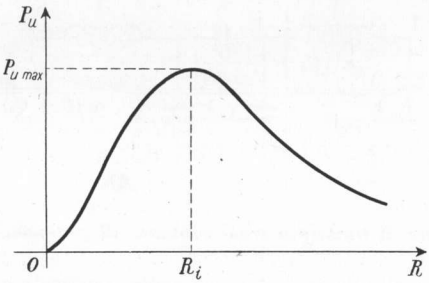


Fig. 58.2 – Andamento della potenza utilizzata nella resistenza di carico del circuito di fig. 58.1 in funzione del valore della resistenza stessa.

Sia dato ora il circuito di fig. 58.3 in cui è presente un generatore di tensione alternata V_0 avente una impedenza interna $\overline{Z}_i$ composta di resistenza R_i e reattanza X_i. Il carico sia costituito da una impedenza $\overline{Z}$ composta a sua volta di resistenza R e di reattanza X.

La potenza utilizzata nel carico si potrà determinare moltiplicando la resistenza R (è solo la parte resistiva del carico che dissipa potenza) per il quadrato dell'intensità di corrente fornita dal generatore:

58.5 $$I = \frac{V_0}{\sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}}$$

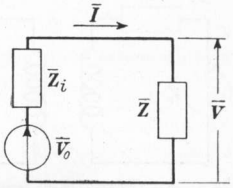


Fig. 58.3 – Circuito comprendente generatore di tensione con impedenza interna ed impedenza di carico.

Sarà quindi:

58.6 $$P_u = \frac{R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} V_0^2 .$$

Si vuole determinare ora a quali valori di X e di R corrisponde il massimo trasferimento di potenza. Si supponga dapprima R costante ed X variabile e si derivi rispetto a quest'ultima. Si ottiene:

$$\frac{dP_u}{dX} = \frac{-R2(X_i + X)}{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2]^2} V_0^2$$

ed uguagliando a zero il numeratore si ricava:

58.7 $$X = -X_i .$$

La 58.7 dice che il massimo trasferimento di potenza sarà da ricercarsi imponendo la condizione che la reattanza di carico sia di valore assoluto ma di segno contrario alla reattanza interna del generatore: a reattanza induttiva del generatore occorre contrapporre una reattanza capacitiva del carico avente lo stesso valore assoluto e viceversa. Questo primo risultato era prevedibile, in quanto a parità di resistenza di carico esso rende minimo il denominatore della 58.6 eliminando il termine reattivo. Qualora la condizione 58.7 sia soddisfatta la 58.6 assume la forma data dalla 58.3 la cui condizione di massimo è ancora data dalla 58.4.

Concludendo: affinché un generatore avente una certa impedenza interna eroghi la massima potenza utile ad un utilizzatore che presenta anch'esso una impedenza, occorre che siano contemporaneamente verificate le due condizioni: che la reattanza del carico sia uguale in valore assoluto e di segno contrario alla reattanza interna del generatore e che inoltre la resistenza del carico sia uguale alla resistenza interna del generatore.

Se ora il generatore di tensione $\overline{V}_0$ eroga potenza al carico attraverso due circuiti accoppiati (fig. 58.4) la condizione di massimo trasferimento si ottiene imponendo che la reattanza del secondario riportata al primario sia di valore uguale e segno contrario alla reattanza del primario e che la resistenza del secondario riportata al primario sia uguale alla resistenza del primario; oppure, il che è lo stesso, che la reattanza del primario riportata al secondario sia di valore uguale e segno contrario alla reattanza del secondario ed uguali siano le resistenze. Si osservi che, a differenza del caso precedente che interessava un solo circuito, nel caso di due circuiti accoppiati le due reattanze considerate ciascuna nel proprio circuito devono essere dello stesso segno, ossia della stessa natura, in quanto riportate nell'altro circuito cambiano segno. Se ad esempio il circuito primario è prevalentemente induttivo, tale dovrà essere anche il circuito secondario affinché si possa avere il massimo trasferimento di potenza.

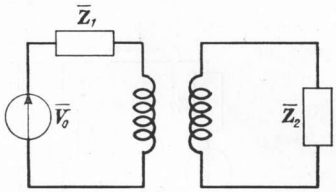


Fig. 58.4 – Generatore di tensione con impedenza interna che alimenta l'impedenza di carico per mezzo di accoppiamento per mutua induzione.

Quando l'impedenza dell'utilizzatore è tale nei confronti della impedenza del generatore che quest'ultimo eroga al carico la massima potenza, si dice che l'impedenza di carico e l'impedenza del generatore sono adattate. In genere dato un generatore ed un carico che debba essere ad esso associato l'adattamento di impedenza non è verificato. Se lo scopo che si vuole ottenere dal circuito è quello del massimo trasferimento di potenza nel carico occorre provvedere al cosiddetto *adattamento* delle impedenze. Il caso più semplice di adattamento è quello che si fa alle basse frequenze tra un generatore ed un utilizzatore di resistenza diversa. Si usa come elemento adattore di impedenza un trasformatore che si interpone tra generatore ed utilizzatore (fig. 58.5) e l'adattamento viene ottenuto proporzionando opportunamente il rapporto di trasformazione n, rapporto tra il numero di spire dell'avvolgimento secondario del trasformatore N_2 ed il numero di spire del primario $N_1 (n = N_2/N_1)$.

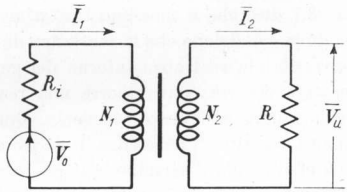


Fig. 58.5 – Trasformatore adattatore di impedenza.

Senza entrare in merito alla teoria completa del trasformatore per basse frequenze si può ora riferirsi ad una teoria semplificata che però permette di arrivare alla determinazione del valore che deve avere n per l'adattamento delle impedenze.

Se si ritiene per approssimazione il trasformatore privo di perdite, la potenza fornita dal generatore P_g si dissiperà parte nella resistenza interna del genera-

tore R_i e parte nella resistenza di carico R. Sarà quindi:

58.8 $$P_g = R_i I_1^2 + R I_2^2 \,.$$

D'altra parte tra le intensità di corrente esiste la nota relazione: $I_2/I_1 = N_1/N_2 = 1/n$ da cui si può ricavare $I_2 = I_1/n$ che sostituito nella 58.8 dà:

58.9 $$P_g = R_i I_1^2 + \frac{R}{n^2} I_1^2 \,.$$

La potenza fornita dal generatore (complessivamente) può anche essere espressa nella forma:

58.10 $$P_g = V_0 I_1 \,.$$

Uguagliando tra loro i secondi membri della 58.10 e della 58.9, e dividendo ambo i membri per I_1 si ottiene:

58.11 $$V_0 = \left(R_i + \frac{R}{n^2}\right) I_1 \,.$$

La 58.11 corrisponde al circuito di fig. 58.6 nel quale compare la resistenza del secondario riportata al primario $R' = R/n^2$.

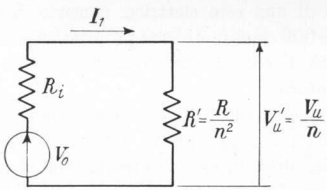


Fig. 58.6 – Circuito equivalente primario del circuito di fig. 58.5.

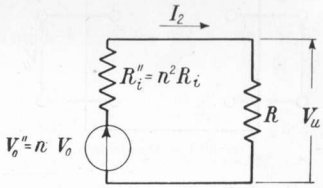


Fig. 58.7 – Circuito equivalente secondario del circuito di fig. 58.5.

L'adattamento di impedenza (e quindi il massimo trasferimento di potenza al carico) si ha quando la resistenza del secondario riportata al primario R' uguaglia la resistenza interna del generatore. Imponendo l'uguaglianza suddetta, con facili calcoli si determina che deve essere:

58.12 $$n = \sqrt{\frac{R}{R_i}} \text{ (1)}.$$

Si sarebbe potuto riportare tutto al secondario sostituendo nella 58.8 ad I_1 il valore $I_1 = nI_2$ e confrontando la relazione così ottenuta con la 58.10. Si sarebbe ricavato:

58.13 $$nV_0 = R_i n^2 I_2 + R I_2 \,.$$

La 58.13 corrisponde al circuito di fig. 58.7 nel quale tutti gli elementi sono stati riportati al secondario. In questo caso per l'adattamento di impedenza bisogna imporre $R = n^2 R_i$ da cui si deduce ancora la 58.12.

(1) Si osservi che il trasformatore adattatore di impedenza deve avere l'avvolgimento con il maggior numero di spire dalla parte della resistenza di valore maggiore.

CAPITOLO VIII

CENNI SU QUADRIPOLI E FILTRI

59. – *Quadripoli passivi.*

Prende il nome di *quadripolo* una rete elettrica, comunque costituita, di cui si possono individuare due morsetti di entrata, tra i quali si applica il segnale, e due morsetti di uscita tra i quali si preleva la risposta. Un quadripolo si indica come in fig. 59.1. Un notevole vantaggio che si ha nello studio come quadripolo di una rete elettrica consiste nel poterne individuare diverse proprietà senza necessità di conoscerne l'esatta composizione interna.

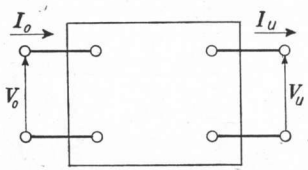


Fig. 59.1 – Quadripolo.

Un quadripolo si dice *passivo* se in esso non esistono generatori di tensione o di corrente, *attivo* in caso contrario. Qui ci si limiterà a dare qualche cenno sui quadripoli passivi composti di elementi lineari.

Tra le tensioni e correnti rispettivamente d'entrata (V_0, I_0) e d'uscita (V_u, I_u), che per ora si suppongono continue, si possono scrivere relazioni del tipo [1]:

$$\begin{aligned} V_0 &= aV_u + bI_u \\ I_0 &= cV_u + dI_u \end{aligned} \qquad (59.1)$$

[2].

I coefficienti che compaiono nelle 59.1 si possono facilmente determinare mediante prove effettuate sul quadripolo dall'esterno. La prova di corto cir-

---

[1] Oltre le relazioni 59.1 se ne potrebbero scrivere altre, ad esempio:

$$\begin{aligned} V_u &= eV_0 + fI_0 \\ I_u &= gV_0 + hI_0 \end{aligned}$$

od anche:

$$\begin{aligned} V_0 &= lI_0 + mV_u \\ I_u &= nI_0 + pV_u \end{aligned}$$

[2] Dall'analisi dimensionale delle relazioni 59.1 si deduce che mentre a e d sono dei coefficienti numerici, b deve avere le dimensioni di una resistenza e c di una conduttanza.

cuito, indicata in fig. 59.2, nella quale è $V_u = 0$ e per la quale le 59.1 si trasformano nelle:

59.2
$$V_0 = bI_u \, (V_u = 0)$$
$$I_0 = dI_u \, (V_u = 0)$$

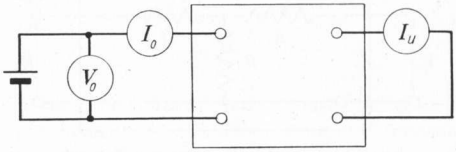


Fig. 59.2 – Prova di corto circuito su un quadripolo.

permette di ricavare:

$$b = \frac{V_0}{I_u} \, (V_u = 0) \quad \text{e} \quad d = \frac{I_0}{I_u} \, (V_u = 0) \, .$$

La prova a vuoto, indicata in fig. 59.3, nella quale è $I_u = 0$ e per la quale le 59.1 si trasformano nelle:

59.3
$$V_0 = aV_u \, (I_u = 0)$$
$$I_0 = cV_u \, (I_u = 0)$$

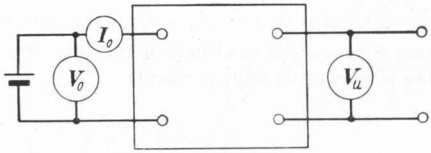


Fig. 59.3 – Prova a vuoto su un quadripolo.

permette di ricavare:

$$a = \frac{V_0}{V_u} \, (I_u = 0) \quad \text{e} \quad c = \frac{I_0}{V_u} \, (I_u = 0) \, .$$

I coefficienti dimensionali e adimensionali che compaiono nelle 59.1 si possono invece calcolare quando si conosce la costituzione interna del quadripolo.

Si può dimostrare che tra i coefficienti a, b, c, d esiste la considdetta *relazione di unimodularità* e precisamente:

59.4
$$ad - bc = 1 \, .$$

Da questa relazione si deduce che fissati tre dei quattro coefficienti il valore

del quarto dipende da essi. Un quadripolo può quindi sempre trasformarsi in un quadripolo semplice equivalente, avente solo tre resistenze, disposte a T (*a stella*, fig. 59.4) o a π (*triangolo*, fig. 59.5).

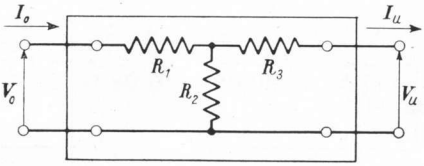


Fig. 59.4 – Quadripolo semplice a T (stella).

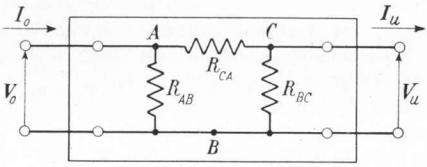


Fig. 59.5 – Quadripolo semplice a π (triangolo).

60. – Resistenza d'ingresso e resistenza di uscita di un quadripolo.

Si dice *resistenza d'ingresso* del quadripolo il rapporto tra V_0 ed I_0 : V_0/I_0 . Dividendo membro a membro le 59.1, si ricava:

60.1 $$R_e = \frac{aV_u + bI_u}{cV_u + dI_u} = \frac{a\dfrac{V_u}{I_u} + b}{c\dfrac{V_u}{I_u} + d}$$

ed osservando che il rapporto V_u/I_u uguaglia la resistenza di carico R collegata tra i morsetti di uscita del quadripolo si ottiene:

60.2 $$R_e = \frac{aR + b}{cR + d} .$$

Per determinare invece la *resistenza di uscita* del quadripolo occorre riportare l'espressione della V_u ad una relazione del tipo:

60.3 $$V_u = AV_0 - R_u I_u$$

in cui A è un coefficiente adimensionale che dipende dalla costituzione del qua-

dripolo ed R_u è la resistenza d'uscita. Dalla prima delle 59.1 si ricava:

$$V_u = \frac{1}{a} V_0 - \frac{b}{a} I_u$$

che confrontata con la 60.3 fornisce:

60.4 $$R_u = \frac{b}{a} .$$

Due quadripoli sono equivalenti se hanno i medesimi coefficienti a, b, c e d. Essi presentano naturalmente la medesima resistenza di ingresso e la medesima resistenza di uscita.

61. – *Quadripoli a T e a π e relative trasformazioni.*

Si consideri il quadripolo a T, detto anche *a stella*, di fig. 59.4. Per esso si scrivono facilmente le relazioni:

$$V_0 = V_u + R_3 I_u + \left(I_u + \frac{V_u + R_3 I_u}{R_2}\right) R_1$$

$$I_0 = \frac{V_u + R_3 I_u}{R_2} + I_u$$

che si possono trasformare in altre che rispettino la forma delle 59.1:

61.1 $$\begin{aligned} V_0 &= \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_u + \left(R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}\right) I_u \\ I_0 &= \frac{1}{R_2} V_u + \left(\frac{R_3}{R_2} + 1\right) I_u . \end{aligned}$$

Queste ultime, confrontate con le 59.1, danno:

61.2 $$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ b &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \\ c &= \frac{1}{R_2} \\ d &= \frac{R_3}{R_2} + 1 . \end{aligned}$$

Analogamente, considerando il quadripolo a π, detto anche *a triangolo*,

di fig. 59.5, si possono scrivere le relazioni:

$$V_0 = V_u + \left(I_u + \frac{V_u}{R_{BC}}\right) R_{CA}$$

$$I_0 = I_u + \frac{V_u}{R_{BC}} + \frac{V_u + \left(I_u + \frac{V_u}{R_{BC}}\right) R_{CA}}{R_{AB}}$$

che si possono trasformare nelle:

61.3
$$V_0 = \left(1 + \frac{R_{CA}}{R_{BC}}\right) V_u + R_{CA} I_u$$

$$I_0 = \left(\frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{AB}} + \frac{R_{CA}}{R_{BC} R_{AB}}\right) V_u + \left(1 + \frac{R_{CA}}{R_{AB}}\right) I_u$$

dalle quali, confrontate con le 59.1, si deduce:

61.4
$$a = 1 + \frac{R_{CA}}{R_{BC}}$$

$$b = R_{CA}$$

$$c = \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{AB}} + \frac{R_{CA}}{R_{BC} R_{AB}}$$

$$d = 1 + \frac{R_{CA}}{R_{AB}} .$$

Imponendo l'eguaglianza di questi ultimi coefficienti con quelli dati dalle 61.2 e risolvendo il sistema che così si ottiene, si trova:

61.5
$$R_1 = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}}$$

$$R_2 = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}}$$

$$R_3 = \frac{R_{BC} R_{CA}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} .$$

Le 61.5 permettono la trasformazione di un quadripolo a triangolo, di cui si conosca la composizione interna, in un quadripolo a stella.

Si ricava pure:

61.6
$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

$$R_{BC} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{CA} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} .$$

Le 61.6 consentono la trasformazione di un quadripolo a stella, di cui si conosca la composizione interna, in un quadripolo a triangolo.

Conviene notare che tutto quanto è stato finora detto per i quadripoli in corrente continua si può estendere ai quadripoli in corrente alternata mediante l'applicazione del teorema di Kennelly-Steinmetz per il quale, ad esempio, le 59.1 devono essere scritte sotto la forma (fig. 61.1):

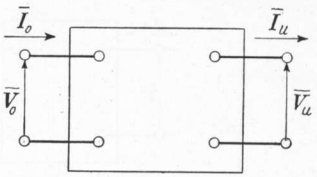


Fig. 61.1 – Quadripolo in corrente alternata.

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= \bar{A}\bar{V}_u + \bar{B}\bar{I}_u \\ \bar{I}_0 &= \bar{C}\bar{V}_u + \bar{D}\bar{I}_u \end{aligned} \tag{61.7}$$

nelle quali i coefficienti dimensionali e adimensionali $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$ compaiono come numeri complessi.

62. – *Quadripoli uguali in cascata.*

Due quadripoli sono *in cascata* allorché i morsetti di uscita del primo sono direttamente collegati ai morsetti di ingresso del secondo (fig. 62.1). Una suc-

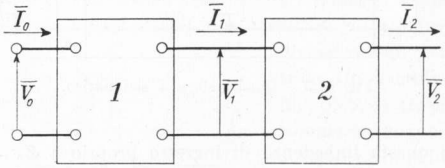


Fig. 62.1 – Quadripoli in cascata.

cessione di infiniti quadripoli uguali in cascata presenta delle interessanti proprietà.

Se $\bar{Z}_0$ è l'impedenza di ingresso della catena, ossia $\bar{Z}_0 = \bar{V}_0/\bar{I}_0$, essa risulta pure l'impedenza all'ingresso di un qualsiasi quadripolo della cascata, ad esempio l'ennesimo. Difatti, se si eliminano tutti i quadripoli precedenti all'ennesimo, attesa l'infinità dei quadripoli in cascata, la catena rimanente è identica alla precedente. Sarà quindi:

$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{V}_0}{\bar{I}_0} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \dots = \frac{\bar{V}_n}{\bar{I}_n} = \dots . \tag{62.1}$$

L'impedenza $\bar{Z}_0$ prende il nome di *impedenza caratteristica* della catena infinita di quadripoli uguali.

È interessante notare che in pratica ci si può trovare nelle condizioni suaccennate anche quando il numero dei quadripoli uguali è limitato, ma l'ultimo

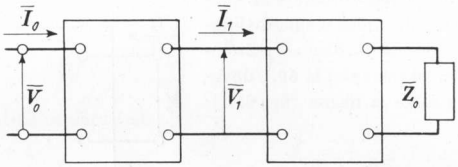


Fig. 62.2 – Quadripoli in cascata chiusa sull'impedenza caratteristica.

di essi è chiuso su una impedenza esattamente uguale all'impedenza caratteristica $\bar{Z}_0$ (fig. 62.2).

La determinazione dell'impedenza caratteristica di un quadripolo si può fare calcolando l'impedenza di ingresso, pensando il quadripolo chiuso sulla $\bar{Z}_0$,

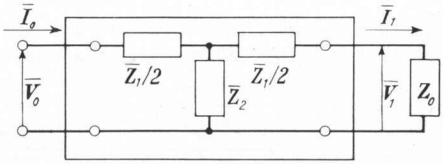


Fig. 62.3 – Quadripolo a T simmetrico.

ed uguagliando questa impedenza di ingresso proprio a $\bar{Z}_0$. Se ad esempio è dato il quadripolo a T simmetrico [1] di fig. 62.3 si può scrivere:

62.2 $$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{Z}_1}{2} + \frac{\bar{Z}_2(\bar{Z}_1/2 + \bar{Z}_0)}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1/2 + \bar{Z}_0}$$

da cui si ricava:

62.3 $$\bar{Z}_0 = \sqrt{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1^2}{4}}\,.$$

Se si immagina il quadripolo di fig. 62.3 una volta aperto alla sua estremità ed una volta chiuso in corto circuito, le rispettive impedenze d'ingresso $\bar{Z}_v$

---

[1] Si dice *simmetrico* un quadripolo le cui proprietà non variano scambiando i morsetti di entrata con quelli di uscita.

e $\overline{Z}_{cc}$ risultano:

62.4
$$\overline{Z}_v = \frac{\overline{Z}_1}{2} + \overline{Z}_2$$
$$\overline{Z}_{cc} = \frac{\overline{Z}_1}{2} + \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_1/2}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1/2} .$$

Le 62.4 moltiplicate tra loro danno:

62.5
$$\overline{Z}_v\overline{Z}_{cc} = \overline{Z}_1\overline{Z}_2 + \frac{\overline{Z}_1^2}{4}$$

che confrontata con la 62.3 fornisce:

62.6
$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\overline{Z}_v\overline{Z}_{cc}} .$$

Allo stesso modo per un quadripolo a π simmetrico (come in fig. 62.4) si può determinare:

62.7
$$\overline{Z}_0 = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{2\sqrt{\overline{Z}_1\overline{Z}_2 + \overline{Z}_2^2}} ,$$

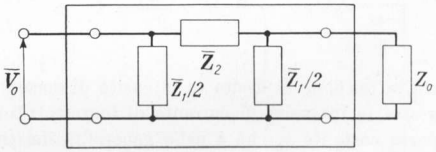


Fig. 62.4 – Quadripolo a π simmetrico.

mentre risulta ancora valida la 62.6.

Per un quadripolo simmetrico scambiando i morsetti di ingresso con quelli di uscita l'impedenza caratteristica non varia. Si otterrebbero invece valori diversi per un quadripolo asimmetrico. Un quadripolo asimmetrico (fig. 62.5, *a*) si potrebbe rendere simmetrico aggiungendo in cascata ad esso un quadripolo identico a quello assegnato, ma capovolto. Se questa aggiunta si fa ai morsetti di uscita (fig. 62.5, *b*) l'impedenza caratteristica presentata dal quadripolo risultante si dice *impedenza immagine di entrata* $\overline{Z}_{ie}$ del quadripolo assegnato, se invece l'aggiunta si fa ai morsetti di entrata (fig. 62.5, *c*) l'impedenza caratteristica presentata dal quadripolo risultante si dice *impedenza immagine di uscita* $\overline{Z}_{iu}$ del quadripolo assegnato. Per un quadripolo asimmetrico valgono le relazioni:

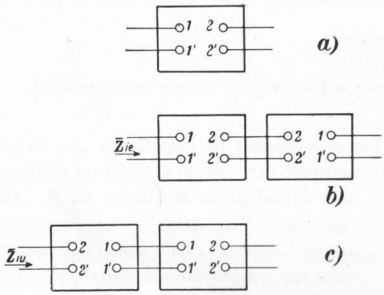


Fig. 62.5 – Determinazione dell'impedenza immagine di entrata e dell'impedenza immagine di uscita di un quadripolo asimmetrico.

62.8
$$\overline{Z}_{ie} = \sqrt{\overline{Z}_{ecc}\overline{Z}_{ev}}$$
$$\overline{Z}_{iu} = \sqrt{\overline{Z}_{ucc}\overline{Z}_{uv}}$$

essendo $\bar{Z}_{ecc}$, $\bar{Z}_{ev}$, $\bar{Z}_{ucc}$ e $\bar{Z}_{uv}$ le impedenze presentate dai morsetti di ingresso o di uscita del quadripolo quando l'altra estremità del quadripolo è rispettivamente in corto circuito o aperta. Per un quadripolo simmetrico le due impedenze immagini coincidono tra loro e con l'impedenza caratteristica.

Per la definizione stessa di impedenza caratteristica di una successione di quadripoli uguali si può scrivere:

$$\frac{\bar{V}_n}{\bar{I}_n} = \frac{\bar{V}_{n+1}}{\bar{I}_{n+1}} = \ldots = Z_0 ,$$

da cui si può ricavare la costanza dei rapporti:

$$\frac{\bar{V}_{n+1}}{\bar{V}_n} = \bar{k} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{I}_{n+1}}{\bar{I}_n} = \bar{k}$$

tra la tensione di uscita (o intensità di corrente di uscita) e la tensione di ingresso (o intensità di corrente di ingresso) di ogni quadripolo. A questo rapporto costante $\bar{k}$, che è nella generalità dei casi un numero complesso, si dà il nome di *rapporto di trasmissione*. Si può porre $\bar{k}$ sotto forma esponenziale complessa scrivendo:

62.8 $$\bar{k} = e^{\gamma} = e^{\alpha + j\beta}$$

in cui e è la base dei logaritmi neperiani; γ prende il nome di *costante di propagazione*, α quello di *costante di attenuazione* e β quello di *costante di fase*.

63. – *Impiego dei quadripoli come adattatori e come attenuatori.*

Un quadripolo può essere usato come *adattatore* di impedenza tra un generatore di resistenza R_i ed un utilizzatore di resistenza R diversa da R_i. Gli elementi del quadripolo devono essere dimensionati in modo che l'impedenza vista dal generatore sia uguale alla sua resistenza interna. Conviene inoltre che il quadripolo adattatore sia costituito di soli elementi reattivi per evitare in essi perdite di energia.

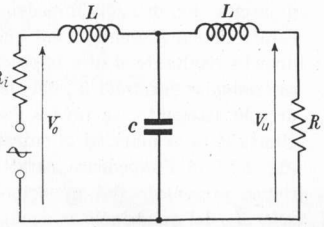


Fig. 63.1 – Quadripolo adattatore di impedenza.

Si voglia ad esempio usare come adattatore il quadripolo simmetrico di fig. 63.1. In esso è necessario che siano contemporaneamente presenti elementi induttivi ed elementi capacitivi, affinché si riduca ad una semplice resistenza l'impedenza vista dal generatore.

Per l'adattamento dovrà essere verificata l'uguaglianza:

$$R_i = j\omega L + \frac{\frac{1}{j\omega C}(j\omega L + R)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R} = j\omega L + \frac{j\omega L + R}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}\,. \tag{63.1}$$

Se inoltre si impone (in questo esempio) che la reattanza induttiva ωL uguagli in valore assoluto la reattanza capacitiva $1/\omega C$, la 63.1 si semplifica nella:

$$R_i = \frac{L}{RC} \tag{63.2}$$

che, sempre per la condizione imposta precedentemente, fornisce:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{R_i R}\,. \tag{63.3}$$

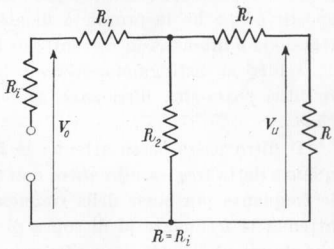


Fig. 63.2 – Quadripolo attenuatore.

Un quadripolo può anche essere usato come *attenuatore* tra un generatore che fornisca ai suoi morsetti una tensione V_0 ed un utilizzatore che richieda ai suoi morsetti una tensione V_u minore di V_0. Se ci si riferisce al caso più semplice di fig. 63.2 nel quale si suppone che la resistenza interna del generatore uguagli la resistenza di carico e che il quadripolo attenuatore resistivo sia a T simmetrico, si possono imporre le uguaglianze:

$$\begin{gathered} \frac{R_1 + R}{R}\,\frac{R_1 + \dfrac{R_2(R_1 + R)}{R_2 + R_1 + R}}{\dfrac{R_2(R_1 + R)}{R_2 + R_1 + R}} = \frac{V_0}{V_u} \\ R = R_i = R_1 + \frac{R_2(R_1 + R)}{R_2 + R_1 + R}\,, \end{gathered} \tag{63.4}$$

la prima delle quali determina il voluto rapporto di attenuazione, mentre la seconda determina l'adattamento tra generatore e quadripolo e tra quest'ultimo e il carico.

Indicando ora con $\alpha = V_0/V_u$ il rapporto di attenuazione desiderato ed osservando che nella prima delle 63.4 il numeratore della seconda frazione coincide con R mentre il suo denominatore è pari ad $R - R_1$, le 63.4 si possono scrivere:

$$\begin{gathered} \frac{R_1 + R}{R - R_1} = \alpha \\ R = R_1 + \frac{R_2(R_1 + R)}{R_2 + R_1 + R}\,. \end{gathered} \tag{63.5}$$

Risolvendo questo ultimo sistema di due equazioni si ricava:

$$R_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} R$$

63.6

$$R_2 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} R \, .$$

64. – *Filtri: generalità e tipi.*

Uno o più quadripoli composti di elementi puramente reattivi (per quanto possibile) possono costituire un *filtro elettrico*, intendendosi come tale un dispositivo che ha le proprietà di attenuare unicamente le grandezze elettriche (tensione e intensità di corrente) di frequenza compresa entro una o più bande.

I filtri si distinguono, secondo la banda di frequenze che attenuano o no, in filtri *passa-alto*, filtri *passa-basso*, filtri *passa-banda* e filtri *eliminatori di banda*.

Il filtro passa-basso attenua le frequenze più alte di una determinata frequenza detta *frequenza frontiera* o di taglio superiore; il filtro passa-alto attenua le frequenze più basse della frequenza di taglio inferiore. Il filtro passa-banda attenua le frequenze al di sopra di una frequenza superiore di taglio e quelle che stanno al di sotto di una frequenza inferiore di taglio, minore della frequenza superiore. Il filtro eliminatore di banda attenua le frequenze comprese tra le due frequenze di taglio.

Il *diagramma di attenuazione* illustra il comportamento del filtro alle varie frequenze. Esso presenta in ascisse le frequenze ed in ordinate l'attenuazione intesa come $20 \log V_0/V_u(dB)$, essendo V_0 e V_u i moduli rispettivamente della tensione di ingresso e della tensione di uscita del filtro.

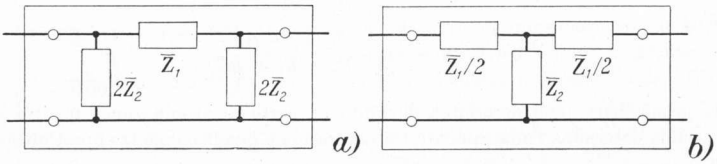


Fig. 64.1 – Filtri simmetrici.

Un tipo di filtro usato è quello a k costante, cosiddetto perché in esso risulta $\sqrt{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2} = k$, essendo k costante per tutte le frequenze e pari alla resistenza R su cui si chiude il filtro. Cosa si intenda per $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$ è specificato nelle figure 64.1, *a*) e *b*) rispettivamente per i filtri a π e per quelli a T.

Si usano pure i filtri tipo m con i quali si ottengono variazioni più brusche di attenuazione in corrispondenza delle frequenze di taglio e si riesce ad avere

Fig. 64.2 – Filtri passa-basso: *a*) tipo k costante; *b*) tipo m.

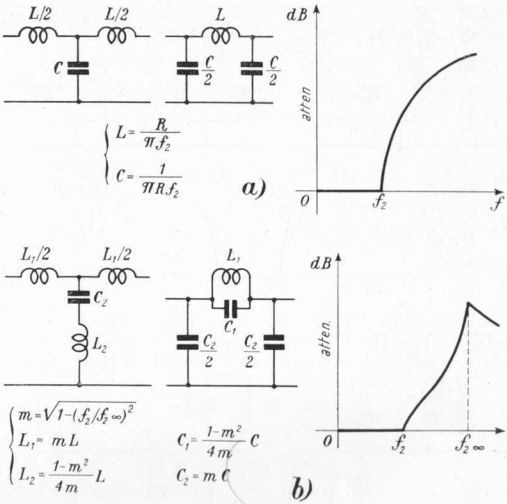
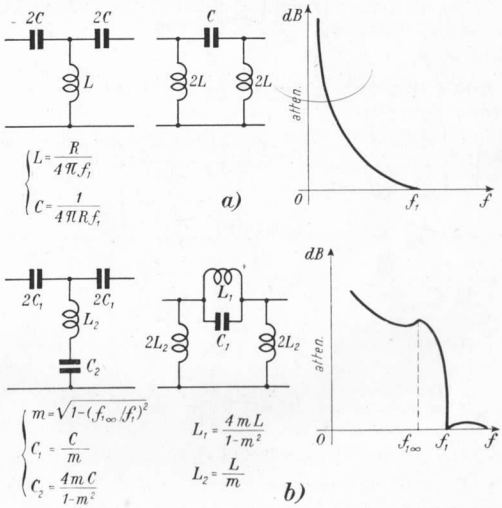
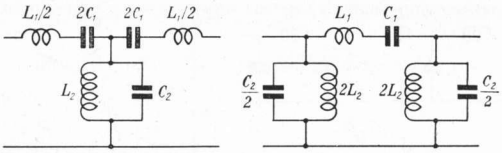


Fig. 64.3 – Filtri passa-alto: *a*) tipo k costante; *b*) tipo m.



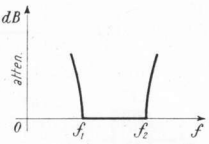


$$L_1 = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}$$

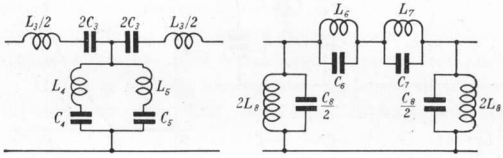
$$L_2 = \frac{(f_2 - f_1)R}{4\pi f_2 f_1}$$

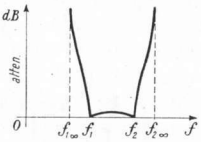
$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_2 f_1 R}$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1)R}$$



a)





b)

$$f_m = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f_{1\infty} f_{2\infty}}$$

$$m = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}\right)^2}{\left(\frac{f_{2\infty}}{f_m} - \frac{f_m}{f_{2\infty}}\right)^2}}$$

$$A = \frac{1 - m^2}{4m}$$

$$n = \frac{f_{2\infty}}{\sqrt{f_1 f_2}} = \frac{f_{2\infty}}{f_m}$$

$$L_3 = m L_1$$

$$C_3 = \frac{C_1}{m}$$

$$L_4 = L_1 A \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$C_4 = \frac{C_1}{1 + n^2} \frac{1}{A}$$

$$L_5 = L_1 A (1 + n^2)$$

$$C_5 = \frac{C_1}{1 + \frac{1}{n^2}} \frac{1}{A}$$

$$L_6 = m L_1 \frac{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}{1 + n^2}$$

$$C_6 = \frac{C_1}{m} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}$$

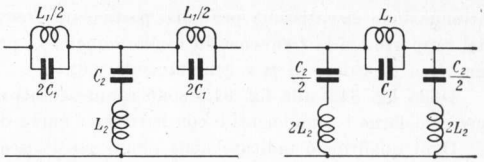
$$L_7 = m L_1 \frac{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$C_7 = \frac{C_1}{m} \frac{1 + n^2}{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$L_8 = \frac{L_2}{m}$$

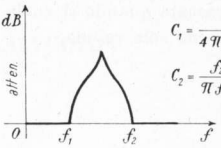
$$C_8 = m C_2$$

Fig. 64.4 – Filtri passa-banda: *a*) tipo k costante; *b*) tipo m.



$$L_1 = \frac{(f_2 - f_1)R}{\pi f_1 f_2}$$

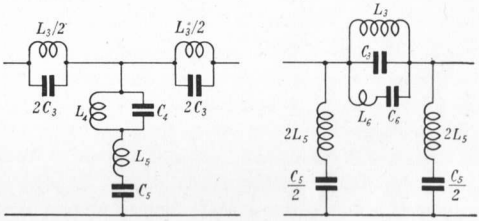
$$L_2 = \frac{R}{4\pi(f_2 - f_1)}$$

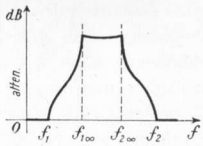


$$C_1 = \frac{1}{4\pi(f_2 - f_1)R}$$

$$C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi f_1 f_2 R}$$

a)





b)

$$f_m = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f_{1\infty} f_{2\infty}}$$

$$m = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{f_{2\infty}}{f_m} - \frac{f_m}{f_{2\infty}}\right)^2}{\left(\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}\right)^2}}$$

$$L_3 = m L_1 \qquad C_3 = \frac{C_1}{m}$$

$$L_4 = \frac{(1-m^2)L_1}{4m} \qquad C_4 = \frac{4m\,C_1}{1-m^2}$$

$$L_5 = \frac{L_2}{m} \qquad C_5 = m\,C_2$$

$$L_6 = \frac{4m}{1-m^2} L_2 \qquad C_6 = \frac{1-m^2}{4m} C_2$$

Fig. 64.5 – Filtri eliminatori di banda: *a*) tipo k costante; [*b*)] tipo m.

attenuazione elevatissima per una particolare frequenza. m è una funzione del rapporto tra la frequenza di taglio e quella f_∞ per la quale l'attenuazione è massima (il valore di m è generalmente 0,6).

Dalla fig. 64.2 alla fig. 64.5 sono rappresentati alcuni filtri con le formule per calcolarne i componenti e con le relative curve di attenuazione.

Ogni quadripolo indicato nelle figure costituisce una *cellula*; si usano più cellule in cascata quando si vuole ottenere una attenuazione maggiore di quella fornita da una sola cellula.

Capitolo IX

TUBI ELETTRONICI A VUOTO

65. – *Emissione termoelettronica.*

Come è noto l'elettricità che è naturalmente presente nei corpi ha la sua più piccola espressione in particelle elementari cariche positivamente o negativamente. Le particelle elementari cariche negativamente — *elettroni* — sono dotate di moto rotatorio ellittico attorno al nucleo dell'atomo cui appartengono; nel nucleo sono invece presenti le cariche positive. L'elettrone è vincolato al proprio nucleo per mezzo di forze di legame, che impediscono ordinariamente all'elettrone di abbandonare il proprio atomo. Questa regola non è generale; essa si verifica in maniera pressoché assoluta nei materiali detti *isolanti*, mentre diviene via via meno rigida passando ai materiali detti *conduttori*. In questi esistono alcuni elettroni, detti *elettroni liberi*, che nella rotazione attorno al nucleo del proprio atomo vengono a trovarsi in posizione di quasi simmetria tra atomi diversi per cui diviene loro facile passare dalla periferia di un atomo alla periferia di un altro atomo. È questo il motivo per cui applicando una d.d.p. tra gli estremi di un corpo conduttore si può avere una corrente elettrica: gli elettroni liberi, che in assenza di d.d.p. applicata si muovono disordinatamente in direzione qualsiasi, vengono ora ad essere orientati nel loro moto dal polo negativo al polo positivo del generatore applicato.

La simmetria delle forze cui è soggetto un elettrone libero non si verifica alla superficie dei conduttori, poiché quivi gli elettroni non si trovano in posizione simmetrica rispetto agli atomi circostanti. Come risultato di questa dissimmetria si manifesta una forza agente sugli elettroni normalmente alla superficie del materiale e rivolta dall'esterno verso l'interno. Naturalmente questa forza è una funzione della distanza dalla superficie del metallo, ma globalmente si può dire che a causa di tale forza nessun elettrone può abbandonare il materiale se non possiede una energia sufficiente a compiere il lavoro contro la forza stessa.

Questo lavoro si dice *lavoro di estrazione* W_e ed è caratteristico di ogni materiale. Il rapporto tra il lavoro di estrazione e la carica dell'elettrone prende il nome di *potenziale intrinseco* V_i del materiale. Nella seguente tabella sono elencati i lavori di estrazione W_e di alcuni materiali. L'unità di misura è l'elettron-volt (eV), equivalente ad $1{,}59.10^{-19}$ joule. I valori numerici dei lavori di

estrazione dati nella tabella coincidono con i valori numerici dei potenziali intrinseci V_i, misurati in volt.

Materiale	W_e(eV)
Catodi ad ossidi	1,1
Cesio	1,8
Ossido di torio	2,5
Tungsteno toriato	2,6
Torio	3,3
Tantalio	4,1
Molibdeno	4,4
Carbonio	4,5
Tungsteno	4,5

In condizioni ordinarie nessun elettrone possiede una energia cinetica superiore al lavoro di estrazione; se però con un mezzo opportuno si riesce a fornire agli elettroni una energia supplementare si può verificare l'abbandono del materiale da parte di alcuni elettroni.

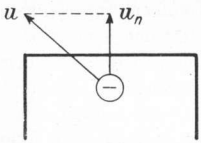


Fig. 65.1 – Emissione elettronica.

Diversi sono i mezzi con i quali si può aumentare l'energia cinetica degli elettroni. Uno dei più facili e abbondantemente impiegato è il *riscaldamento*. L'aumento della temperatura di un corpo produce anche un aumento della velocità dei suoi elettroni e se un elettrone ad un certo istante viene ad avere una velocità u con componente normale alla superficie del metallo u_n (fig. 65.1) di valore tale che l'energia cinetica ad essa dovuta sia superiore al lavoro di estrazione, ossia:

$$\frac{1}{2} m u_n^2 > V_i \cdot e \tag{65.1}$$

essendo m la massa dell'elettrone ($0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg) ed e la sua carica ($1{,}59 \cdot 10^{-19}$ coulomb), l'elettrone abbandona il metallo. Si ha in questo caso una *emissione termoelettronica*. In base alle considerazioni precedenti è ovvio che l'emissione avverrà in misura maggiore, a parità di altre circostanze, dai materiali che hanno un potenziale intrinseco inferiore e sarà una funzione della temperatura dei materiali stessi. Esiste una legge, detta di *Richardson*, che dà la dipendenza dell'intensità di corrente di emissione (quantità di elettricità emessa nell'unità di tempo da un materiale riscaldato) dalla temperatura assoluta del corpo riscaldato. Ammessa l'omogeneità della superficie emittente e l'eguaglianza in ogni punto della temperatura della superficie stessa, la legge di Richardson assume la forma:

$$I_s = A T^2 e^{-b/T} S \,, \tag{65.2}$$

nella quale A è una costante, T è la temperatura assoluta in gradi Kelvin, e è la base dei logaritmi neperiani, S è la superficie emittente e b è una costante che dipende dal materiale emittente ed è funzione del lavoro di estrazione.

Nei tubi elettronici si sfrutta questa proprietà per cui i corpi riscaldati possono emettere elettroni. Dalla 65.2 si deduce che come materiali emettitori conviene usare quelli che, oltre ad avere un basso lavoro di estrazione, possano funzionare a temperature elevate senza danneggiarsi, fondere o sublimare.

66. – Diodo a vuoto.

Il più semplice dei tubi elettronici è il *diodo*. Esso è costituito da un involucro ordinariamente in vetro (talvolta in metallo) nel quale è stato praticato un vuoto spinto. Nell'interno dell'involucro o *bulbo* vi sono i cosiddetti *elettrodi*, collegati elettricamente a *piedini* metallici esterni al bulbo con i quali si effettuano gli opportuni collegamenti nei circuiti di utilizzazione. Uno degli elettrodi assume la funzione di emettitore. Esso è costituito da un metallo che viene opportunamente riscaldato. Il riscaldamento si può ottenere facendo circolare una corrente elettrica nello stesso emettitore (*riscaldamento diretto*) oppure facendo circolare una corrente elettrica in un filamento posto nelle vicinanze dell'emettitore stesso (*riscaldamento indiretto*). Un altro elettrodo assume la funzione di raccoglitore o collettore degli elettroni emessi dall'emettitore. L'emettitore si dice *catodo*, mentre il collettore si dice *anodo*. In fig. 66.1 sono indicati i simboli usati negli schemi elettronici per rappresentare il diodo a riscaldamento diretto e quello a riscaldamento indiretto.

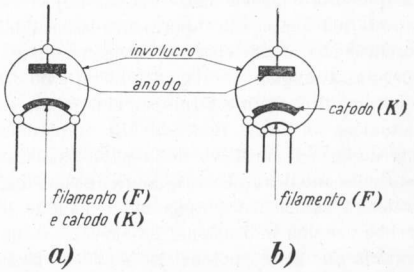


Fig. 66.1 – *a*) diodo a riscaldamento diretto; *b*) diodo a riscaldamento indiretto.

Il funzionamento del diodo dipende dalla costituzione asimmetrica dei suoi elettrodi: il catodo è adatto a emettere elettroni, l'anodo no. L'anodo può raccogliere elettroni qualora venga messo in opportune condizioni e precisamente, essendo gli elettroni negativi, qualora venga portato ad un potenziale positivo rispetto al catodo. Il passaggio di elettroni dal catodo all'anodo dipende quindi dall'esistenza di una d.d.p. e dal valore di questa.

Dopo avere schematizzato il diodo, per semplicità di studio, come in fig. 66.2, si riporti su un sistema di assi cartesiani in verticale la distanza dal catodo di ciascun punto nell'interno del diodo compreso tra catodo e anodo ed in orizzontale la d.d.p. tra ciascuno di questi punti ed il catodo. Si supponga dapprima che il catodo sia riscaldato e sia nulla la d.d.p. tra anodo e catodo (curva *a*). In questo caso dal catodo viene emessa una certa corrente di intensità tanto maggiore quanto maggiore è la temperatura di riscaldamento (secondo la legge di Richardson). Gli elettroni che hanno abbandonato il catodo si allontanano

da esso in misura dipendente dallo scarto tra l'energia cinetica che posseggono prima dell'emissione ed il lavoro di estrazione. Questo scarto rappresenta l'energia cinetica residua posseduta dagli elettroni affioranti alla superficie del catodo. Data la casualità del fenomeno, all'uscita dal catodo non tutti gli elettroni possederanno la stessa velocità, ma ve ne saranno di quelli con velocità nulla ed altri con velocità via via maggiore. L'allontanamento dal catodo sarà ovviamente una funzione di questa velocità. Occorre notare che il catodo, privato degli elettroni emessi, diviene positivo. Tra catodo positivo ed elettroni emessi negativi si determina quindi una d.d.p. causa di un campo elettrico che agisce sugli elettroni stessi nel senso di riportarli sul catodo. Se il catodo cessasse di essere riscaldato tutti gli elettroni emessi verrebbero da esso riassorbiti. Poichè invece il catodo continua ad essere riscaldato saranno contemporaneamente presenti nell'interno del diodo una corrente di emissione dovuta al riscaldamento ed una corrente di riassorbimento dovuta alla d.d.p. esistente tra catodo e ciascun punto nell'interno del diodo. Se si aumenta la temperatura del catodo aumenta la corrente di emissione, quindi il numero di elettroni presenti nell'interno del diodo, quindi la d.d.p., quindi l'intensità del campo che respinge gli elettroni sul catodo. Di conseguenza si determina in ogni caso una condizione di equilibrio per cui nell'unità di tempo il numero di elettroni emessi è uguale al numero di elettroni riassorbiti, mentre tra catodo e anodo (prevalentemente nelle vicinanze del catodo) vi è una certa quantità di elettroni costante nel tempo che rappresenta la cosiddetta *carica spaziale negativa*. Non è escluso che alcuni elettroni vengano emessi dal catodo con una velocità sufficiente a raggiungere l'anodo; in tal caso essi ritornano al catodo passando ateraverso il circuito esterno che si suppone chiuso costituendo così una corrente anodica, anche se limitata. Un amperometro sensibile inserito nel circuito sterno (con il negativo dalla parte dell'anodo) misurerebbe tale intensità di corrente anodica; mentre qualora nessuno degli elettroni emessi dal catodo avesse velocità sufficiente a raggiungere l'anodo il medesimo amperometro non darebbe nessuna indicazione. La curva *a* di fig. 66.2 indica come essendo anodo e catodo allo stesso potenziale la carica spaziale porti l'interno del diodo ad un potenziale inferiore (negativo se il catodo è considerato a potenziale zero).

Si consideri ora il caso in cui il catodo non sia riscaldato mentre venga applicata una d.d.p. V_1 positiva tra anodo e catodo (curva *b* di fig. 66.2). Supposto per semplicità che gli elettrodi siano costituiti da due superfici piane e parallele di dimensioni abbastanza rilevanti nei confronti della loro distanza, la distribuzione di tensione tra anodo e catodo è lineare, l'intensità del campo è la stessa in ogni punto compreso tra i due elettrodi e la sua direzione è tale che un elettrone eventualmente presente verrebbe attirato sull'anodo, ovunque si trovasse. Se ora, mantenendo invariata la d.d.p. applicata tra anodo e catodo, quest'ultimo viene riscaldato, si ha una emissione di elettroni che con la loro carica negativa alterano la preesistente distribuzione lineare di tensione rendendo più negativo il potenziale di ciascun punto compreso tra anodo e catodo, mentre il potenziale di questi elettrodi rimane invariato. Nella fig. 66.2 si ha quindi il passaggio dalla configurazione *b* alla configurazione *b'*. Si nota

che i punti più vicini al catodo sono a potenziale negativo, mentre quelli più lontani sono a potenziale positivo. Il campo elettrico è diverso da punto a punto non solo in quanto ad intensità ma anche come verso, essendo tale da agire sugli elettroni nel senso di riportarli sul catodo allorché quelli si trovano tra il catodo ed una zona del diodo a distanza X dal catodo, ed invece nel senso di sospingerli verso l'anodo allorché quelli si trovano tra la zona a distanza X dal catodo e l'anodo. Si deduce quindi che in questo caso nell'unità di tempo raggiungerà l'anodo un numero maggiore di elettroni che nel caso precedente e precisamente tutti quelli che escono dal catodo con una velocità sufficiente a far loro superare la zona X. Nel circuito esterno ci sarà una corrente anodica ovviamente dipendente da V_1. Se V_1 aumenta, aumenterà pure il numero degli elettroni che raggiungeranno l'anodo perché il punto X si sposterà verso il catodo e quindi potranno superarlo anche elettroni uscenti dal catodo con velocità relativamente bassa. In ogni unità di tempo sarà soddisfatto l'equilibrio: elettroni emessi = elettroni riassorbiti + elettroni che passano in circolazione nel circuito esterno. Aumentando quindi V_1, mentre rimane costante il numero di elettroni emessi nella unità di tempo (funzione della temperatura del catodo) aumenta il numero degli elettroni che entrano in circolazione (corrente anodica) fino a tanto che tra anodo e catodo sarà applicata una d.d.p. V_s tale che tutti gli elettroni emessi dal catodo raggiungeranno l'anodo: la corrente anodica uguaglierà allora la corrente di emissione I_s. In tal caso nessuna zona del diodo si trova a potenziale inferiore al catodo; il punto X coincide con il catodo ed anche gli elettroni che affiorano alla superficie del catodo con velocità nulla (avendo esaurito tutta la loro energia cinetica per vincere il lavoro di estrazione) vengono convogliati verso l'anodo (curve c e c' di fig. 66.2). Qualora la d.d.p. applicata tra anodo e catodo superi il valore caratteristico V_s prima considerato non si ha nessuna variazione nel funzionamento del diodo in quanto il numero degli elettroni emessi nell'unità di tempo non dipende da V_s ma dalla temperatura del catodo che si suppone invariata e d'altra parte tutti gli elettroni emessi raggiungono l'anodo come quando la d.d.p. è V_s. La corrente anodica assume quindi un certo valore I_s per V_s e si mantiene inalterata ed uguale a I_s per qualunque valore di tensione superiore a V_s. Si ha la cosiddetta *saturazione dell'emissione*: il valore caratteristico V_s si dice *potenziale di saturazione del diodo* ed I_s si dice anche *intensità di corrente di saturazione.*

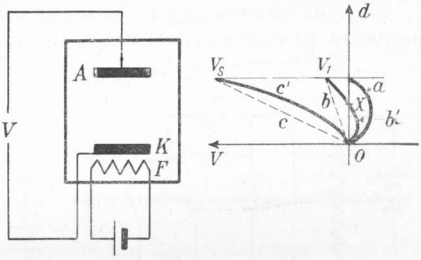


Fig. 66.2 – Distribuzione dei potenziali nell'interno del diodo.

67. – *Caratteristiche anodiche del diodo.*

Si denomina *caratteristica anodica* del diodo la curva che rappresenta come varia l'intensità di corrente anodica I_a al variare della d.d.p. tra anodo e catodo V_a, detta anche tensione anodica. La caratteristica ha un andamento crescente con V_a fino a quando è $V_a = V_s$, dopodiché rimane costante.

Di queste caratteristiche ne esiste una infinità, una per ogni valore di temperatura a cui viene portato il catodo. Il circuito per il rilievo sperimentale delle

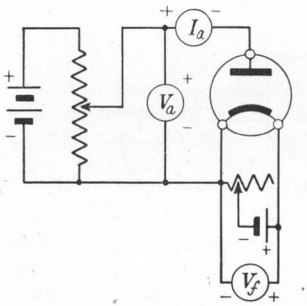


Fig. 67.1 – Circuito per il rilievo sperimentale delle caratteristiche anodiche di un diodo a riscaldamento diretto.

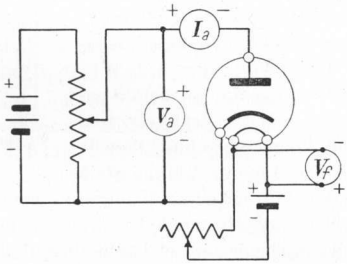


Fig. 67.2 – Circuito per il rilievo sperimentale delle caratteristiche anodiche di un diodo a riscaldamento indiretto.

caratteristiche anodiche del diodo è rappresentato in fig. 67.1 per un diodo a riscaldamento diretto ed in fig. 67.2 per un diodo a riscaldamento indiretto. Nei circuiti indicati si ha anche la possibilità di variare la temperatura T del catodo variando la tensione V_f applicata al filamento. Di conseguenza ogni caratteristica anodica avrà come parametro T o più comodamente V_f da cui T dipende.

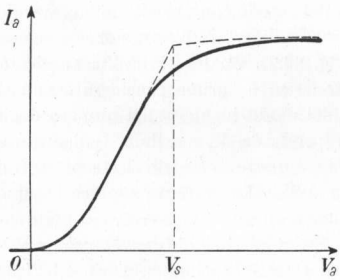


Fig. 67.3 – Caratteristica anodica di un diodo.

La fig. 67.3 rappresenta una caratteristica anodica tracciata per un determinato valore della tensione del filamento V_f (corrispondente ad un determinato valore della temperatura assoluta del catodo T); mentre la fig. 67.4 rappresenta una *famiglia* (o insieme) di caratteristiche anodiche ottenute variando il valore della tensione del filamento V_f (o della temperatura assoluta del catodo T).

Si noti che nel semipiano corrispondente a tensione anodica negativa la caratteristica anodica coincide con l'asse delle ascisse in quanto nessun elettrone è in grado di raggiungere l'anodo. Esaminando una caratteristica anodica (fig. 67.3) se ne possono considerare diversi tratti: un primo tratto per tensione anodica negativa e intensità di corrente anodica costantemente nulla; ciò equivale a resistenza infinita (intendendo per resistenza il valore del rapporto tra tensione anodica e corrispondente intensità di corrente anodica). Si ha poi un secondo tratto di caratteristica (notare nella fig. 67.3 la differenza tra una caratteristica anodica ideale tratteggiata ed una caratteristica anodica reale a tratto pieno) nel quale per tensione anodica positiva crescente si ha pure intensità anodica crescente; l'intensità di corrente anodica non varia però linearmente con la tensione anodica per cui il rapporto tra la tensione anodica e la rispettiva intensità di corrente anodica non è costante, ma funzione della tensione anodica stessa. Nel terzo tratto che ha inizio per tensione anodica uguale al potenziale di saturazione l'intensità di corrente anodica rimane costante. Si può concludere che la resistenza del diodo assume infiniti valori: uno per ciascun valore di tensione anodica. Ciò si può rilevare anche graficamente dalla caratteristica anodica se si osserva che essendo la resistenza il rapporto tra tensione anodica ed intensità di corrente anodica essa viene rappresentata (o meglio è proporzionale) alla cotangente dell'angolo formato con l'asse delle ascisse dalla retta che partendo dall'origine degli assi interseca la caratteristica nel punto in esame. Infatti (fig. 67.5):

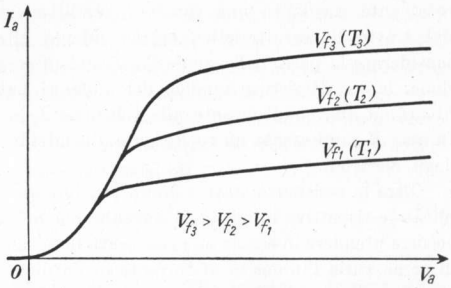


Fig. 67.4 – Famiglia di caratteristiche anodiche di un diodo.

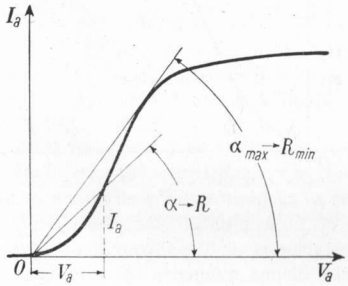


Fig. 67.5 – Resistenza interna (statica) del diodo.

$$67.1 \quad R = \frac{V_a}{I_a} = \frac{1}{I_a/V_a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Dalla fig. 67.5 si rileva come il minimo valore di resistenza (nel significato finora considerato) corrisponda al punto della caratteristica nel quale la congiungente con l'origine è tangente alla caratteristica stessa. Da quanto fin qui detto risulta che il diodo è un conduttore *anomalo* in quanto non segue la legge di Ohm ed *unidirezionale* in

quanto conduce solo nel verso anodo-catodo. Mentre nel caso di resistenze che seguano la legge di Ohm la relazione che lega l'intensità di corrente alla tensione è una funzione lineare del tipo $I = V/R$, nel caso del diodo la relazione non solo non è lineare, ma non è neppure esprimibile rigorosamente mediante una funzione analitica. Tuttavia se si fa astrazione dal tratto di caratteristica corrispondente alla saturazione e ci si limita a considerare la parte nella quale l'intensità di corrente è crescente con la tensione, la caratteristica anodica del diodo si può assimilare ad una parabola di ordine 3/2, soddisfacente alla relazione $I_a = KV_a^{3/2}$, detta legge di *Child*. In essa K rappresenta un coefficiente dipendente dalla forma e dalle dimensioni degli elettrodi.

Oltre la resistenza statica finora considerata (rapporto tra una tensione applicata e rispettiva intensità di corrente) che nel diodo è funzione della tensione, occorre prendere in esame una resistenza diversamente definita. Essa tiene conto di come varia l'intensità di corrente in un diodo soggetto ad una determinata tensione anodica quando questa tensione subisce una variazione o incremento (positivo o negativo): si indica ordinariamente con il nome di *resistenza incrementale* R_Δ e la sua espressione è la seguente:

67.2 $$R_\Delta = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a}$$

nella quale ΔV_a rappresenta un incremento di tensione anodica e ΔI_a il corrispondente incremento di intensità di corrente anodica. Nel caso di una resi-

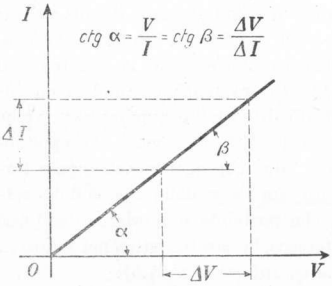


Fig. 67.6 – Caratteristica di una resistenza che segue la legge di Ohm.

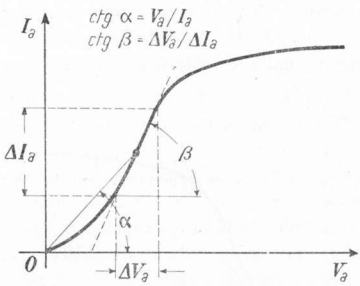


Fig. 67.7 – Caratteristica di un diodo o di una resistenza che non segue la legge di Ohm.

stenza che segua la legge di Ohm non vi è alcuna differenza tra la resistenza statica e la resistenza incrementale, infatti essa è rappresentata (fig. 67.6) dalla cotangente del medesimo angolo, mentre nel caso del diodo tale differenza esiste ed è concettualmente, e spesso anche numericamente, notevole (fig. 67.7). La resistenza comunemente definita è l'ostacolo offerto al passaggio della corrente, la resistenza incrementale è l'ostacolo alle variazioni di intensità di corrente. Si supponga ad esempio che un diodo si trovi in condizione di satura-

zione ossia che tutti gli elettroni emessi nell'unità di tempo dal catodo vengano assorbiti dall'anodo (tensione anodica superiore al potenziale di saturazione): il diodo offre una resistenza al passaggio della corrente data dal rapporto tra tensione ed intensità. Se ora si aumenta la tensione anodica, essendo il diodo in saturazione, l'intensità di corrente anodica non potrà aumentare, ossia il diodo offre una resistenza infinita alle variazioni di intensità di corrente (resistenza incrementale); il valore della resistenza incrementale è quindi notevolmente diverso dal valore di resistenza comunemente definito. Spesso si parla di *resistenza differenziale* anziché di resistenza incrementale: essa corrisponde a variazioni infinitesime di tensione anodica: si dice anche *resistenza interna differenziale* del diodo o *resistenza anodica*:

67.3 $$R_a = \frac{dv_a}{di_a}.$$

In questo caso risulta evidente che il valore della resistenza interna differenziale coincide (o meglio è proporzionale) con il valore della cotangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva caratteristica nel punto consi-

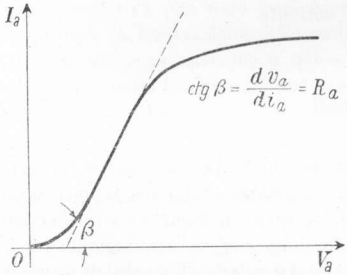


Fig. 67.8 – Resistenza interna differenziale.

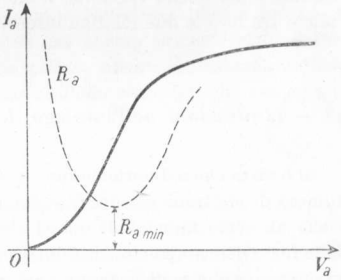


Fig. 67.9 – Variazione della resistenza interna differenziale di un diodo.

derato fa con l'asse delle ascisse (fig. 67.8). È altresì evidente che anche la resistenza interna differenziale non è la stessa per qualsiasi condizione di funzionamento, ma dipende dal punto della caratteristica anodica nel quale il diodo deve lavorare. Essa varia da infinito ad un valore minimo corrispondente al tratto centrale quasi rettilineo della caratteristica per tornare ad infinito in condizione di saturazione. Se si parla di resistenza interna differenziale di un diodo senza specificarne il punto di funzionamento si deve intenderne il valore minimo (fig. 67.9).

Se un diodo è soggetto ad una tensione continua l'intensità di corrente che l'interessa è immediatamente determinabile dalla caratteristica: il diodo si comporta come una comune resistenza. Se il diodo è soggetto ad una tensione continua più una tensione variabile se ne può determinare l'intensità di corrente

calcolando istante per istante la tensione risultante e determinando ancora sulla caratteristica istante per istante l'intensità di corrente corrispondente; oppure se le variazioni non sono molto grandi (in modo che si possa ritenere rettilinea la parte di caratteristica anodica interessata durante il funzionamento), si può determinare la componente costante di corrente dalla caratteristica e la componente variabile da aggiungere istante per istante impiegando il valore di resistenza interna differenziale che presenta il diodo nel punto di funzionamento. Quindi un circuito come quello rappresentato in fig. 67.10, *a*) si può esaminare scisso nei due circuiti di fig. 67.10, *b*) e fig. 67.10, *c*) validi rispettivamente per la componente costante e per quella variabile. L'intensità di corrente risultante si otterrà sommando tra loro le due relative intensità di corrente.

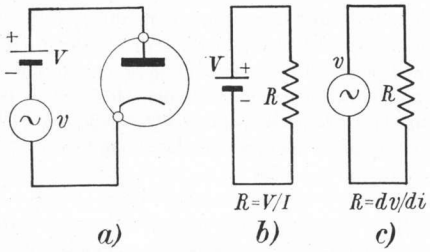


Fig. 67.10 – *a*) diodo alimentato con tensione continua e con tensione variabile; *b*) circuito equivalente del diodo per le componenti continue; *c*) circuito equivalente del diodo per le componenti variabili.

68. – *Limitazioni nell'impiego dei diodi.*

Si è visto che nel normale funzionamento del diodo il catodo emette un certo numero di elettroni per unità di tempo (in dipendenza dalla sua temperatura) e che un certo numero di questi elettroni (o tutti, in saturazione) sollecitati dalle forze del campo elettrico dovuto alla tensione anodica raggiungono l'anodo ed entrano nel circuito esterno. Nel passaggio dal catodo all'anodo gli elettroni vengono accelerati acquistando così una energia cinetica che annullandosi all'urto degli elettroni stessi sull'anodo si trasforma in energia termica. Se si considera un elettrone uscente dal catodo con velocità nulla e si suppone uniforme l'intensità del campo tra anodo e catodo ed uguale a V_a/d (dove d è la distanza tra gli elettrodi), la forza esercitata sull'elettrone sarà uguale a $e \cdot V_a/d$ e quindi il lavoro compiuto per spostare l'elettrone sulla distanza d sarà $d \cdot e \cdot V_a/d = V_a e$. Questo lavoro si trasforma in energia cinetica dell'elettrone e quindi in energia termica dissipata sull'anodo. Se invece di un solo elettrone ci si riferisce al passaggio tra catodo e anodo di una certa quantità di elettricità Q, l'energia termica corrispondentemente dissipata sull'anodo sarà data da $V_a Q$. Se il passaggio tra catodo e anodo della quantità di elettricità Q avviene uniformemente nell'intervallo di tempo T la potenza dissipata sull'anodo sarà $V_a \cdot Q/T = V_a I_a$. Si ottiene quindi la stessa formula che dà la potenza dissipata in una resistenza nella quale una tensione V_a faccia circolare una corrente di intensità I_a. Se poi la tensione anodica e quindi l'intensità di corrente anodica

non sono costanti nel tempo si potrà calcolare istante per istante la potenza istantanea mediante il prodotto dei valori istantanei delle due grandezze:

68.1 $$p_a = v_a i_a \, .$$

Questa dissipazione anodica di potenza è da tener ben presente nell'impiego dei diodi per non superare il valor massimo (determinato dal costruttore) compatibile con una buona durata dei diodi medesimi. Avviene infatti che, oltre la sollecitazione termica dell'anodo, il calore prodotto renda libere eventuali molecole di gas racchiuse nei pori del metallo costituente l'anodo. Queste molecole colpite dagli elettroni emessi dal catodo ed accelerati dalla tensione anodica possono scindersi (ionizzarsi) dando origine ad elettroni e a cariche positive (ioni) di massa rilevante rispetto a quella degli elettroni. Gli ioni positivi così prodotti vengono attirati dal catodo negativo e, se cadono su di esso con eccessiva energia cinetica, possono danneggiarlo compromettendo il funzionamento del diodo.

Non esiste soltanto una limitazione nella potenza anodica e di conseguenza nella *tensione anodica diretta* (anodo positivo rispetto al catodo), ma anche nella *tensione inversa* (anodo negativo rispetto al catodo). Infatti una tensione inversa eccessiva può dare origine ad un campo elettrico talmente intenso da provocare la ionizzazione delle molecole di gas ancora presenti nell'involucro con conseguenze analoghe a quelle viste prima. Anche la massima tensione diretta e quella inversa che può sopportare il diodo sono dati che vengono fissati dal costruttore.

69. – Riscaldamento diretto e riscaldamento indiretto.

Si è già visto che esistono due tipi di riscaldamento del catodo: il riscaldamento diretto nel quale il catodo funge contemporaneamente da riscaldatore ed è a tal fine percorso da una intensità di corrente detta di accensione; il riscaldamento indiretto nel quale il catodo adempie unicamente alla funzione di emettitore di elettroni mentre la funzione riscaldatrice è affidata ad un filamento separato percorso dalla corrente di accensione e posto nelle immediate vicinanze del catodo in modo da trasferirgli la maggior quantità possibile di calore. È più che evidente per quanto riguarda l'utilizzazione del calore prodotto dal riscaldatore che le condizioni migliori si hanno nel riscaldamento diretto e che quindi in questo tipo di riscaldamento si ha la maggior *efficienza* nell'emissione intesa come rapporto tra intensità di corrente di emissione e potenza spesa nel riscaldamento. D'altra parte uno svantaggio notevole di questo tipo di riscaldamento lo si riconosce immediatamente nel fatto che una variazione nella corrente di accensione provoca una variazione nella potenza riscaldante e quindi nella temperatura del catodo di cui in definitiva varia la corrente di emissione. Questo inconveniente pur non essendo completamente eliminato è notevolmente ridotto nel riscaldamento indiretto anzitutto perché

non essendo il catodo lo stesso elemento riscaldatore segue con una certa inerzia le variazioni di temperatura di quest'ultimo e soprattutto perché, non dovendo il catodo funzionare da resistenza nei riguardi della corrente d'accensione, le sue dimensioni non sono condizionate da considerazioni di carattere elettrico e potendo quindi essere di dimensioni maggiori presenta una inerzia termica più considerevole alle variazioni di temperatura.

Se poi il riscaldamento diretto del catodo avviene per mezzo di una sorgente di tensione alternata, l'incostante distribuzione di potenziale sul catodo deter-

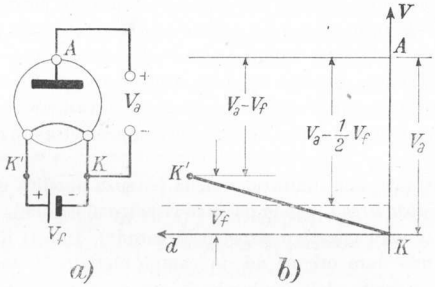


Fig. 69.1 – Distribuzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un diodo riscaldato direttamente con una sorgente di f.e.m. continua (ritorno del circuito anodico sul negativo del catodo).

mina ancora una variazione dell'intensità di corrente anodica indipendente dalla tensione anodica. Per meglio comprendere questo inconveniente si proceda per gradi supponendo dapprima che la sorgente del circuito di accensione fornisca una tensione continua. Il circuito sia quello di fig. 69.1, *a*). Il ritorno del circuito anodico sia effettuato sul negativo della tensione applicata al filamento. Si assuma il potenziale del punto K, comune al circuito anodico ed al circuito di accensione, come potenziale di riferimento e lo si ponga uguale a zero. Si consideri ora la distribuzione di potenziale presente sul catodo e sull'anodo ritenendo per semplicità che i due elettrodi siano piani e paralleli tra loro e che la resistenza del filamento sia uniformemente distribuita. Si osserva (fig. 69.1, *b*) che tutti i punti dell'anodo sono allo stesso livello di potenziale V_a rispetto al punto K, mentre i punti del catodo sono a potenziale crescente man mano che ci si sposta verso l'altro estremo, raggiungendo il massimo uguale a V_f nel terminale K'. Se ora si riferisce il potenziale dei diversi punti dell'anodo ai corrispondenti punti del catodo si nota come la distribuzione di potenziale anodo-catodo vada gradatamente crescendo dal valore $V_a - V_f$ presente tra A e K' al valore V_a presente tra i punti A e K. L'intensità di corrente anodica non è quindi quella corrispondente alla tensione anodica V_a, ma quella corrispondente al valor medio della distribuzione linearmente variabile di tensione e precisamente a $V_a - 1/2\ V_f$.

La tensione di alimentazione sia ora ancora continua, ma il ritorno del cir-

cuito anodico venga effettuato sul positivo della batteria di accensione (figura 69.2, *a*). Allora la distribuzione dei potenziali sempre riferita al punto K si presenta come in fig. 69.2, *b*): l'intensità di corrente è quindi quella corrispon-

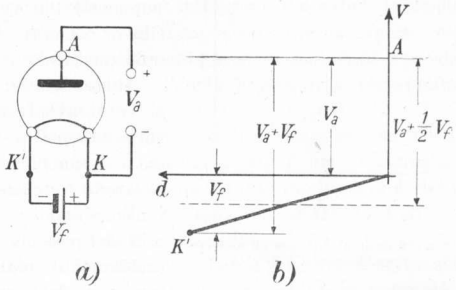


Fig. 69.2 – Distribuzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un diodo riscaldato direttamente con una sorgente di f.e.m. continua (ritorno del circuito anodico sul positivo del catodo).

dente al valor medio della distribuzione linearmente variabile di tensione, e precisamente $V_a + 1/2\ V_f$.

La sorgente d'alimentazione del circuito d'accensione fornisca infine una tensione alternata (fig. 69.3, *a*): la distribuzione dei potenziali è allora continua-

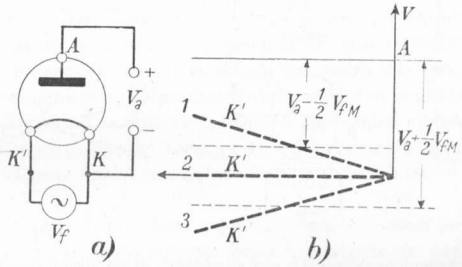


Fig. 69.3 – Distribuzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un diodo riscaldato direttamente con una sorgente di f.e.m. alternata.

mente variabile nel tempo passando dalla configurazione 1 (fig. 69.3, *b*) alla configurazione 3. Ciò equivale mediamente ad uno spostamento di moto armonico, con frequenza uguale alla frequenza della V_f, del livello orizzontale (medio) della tensione del catodo rispetto al punto K; per cui la risultante tensione anodica assume il seguente valore istantaneo: $V_a + (1/2)\ V_{fM}$ sen ωt. Ciò significa che ad una tensione anodica costante V_a applicata dall'esterno tra anodo e catodo non corrisponde una intensità di corrente anodica costante, bensì

una corrente anodica a valor istantaneo variabile sinusoidalmente (o quasi) attorno ad un valore costante. Questo inconveniente non si verifica invece in un diodo in cui il riscaldamento è indiretto (fig. 69.4, *a*), perché in questo caso il catodo è costantemente equipotenziale (fig. 69.4, *b*) e l'intensità di corrente anodica dipende unicamente da V_a.

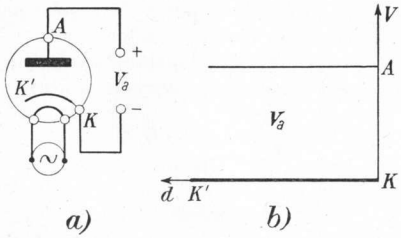


Fig. 69.4 – Distribuzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un diodo a riscaldamento indiretto.

Riassumendo: ogni qualvolta si vorrà avere una intensità di corrente anodica in un diodo (ma ciò vale anche per i tubi a più elettrodi) funzione univoca della tensione anodica converrà, nei limiti del possibile, ricorrere al riscaldamento indiretto; qualora invece la condizione suddetta non sia richiesta il riscaldamento diretto sarà vantaggioso per la maggiore efficienza dell'emissione. Alcune volte pur usando il riscaldamento diretto si cerca di ridurre gli effetti della incostante distribuzione dei potenziali catodici facendo il ritorno del circuito anodico su un punto equipotenziale con il centro del catodo. Ciò può essere ottenuto nei due modi indicati in fig. 69.5. La distribuzione dei potenziali catodici varia allora nel tempo passando successivamente dalla configu-

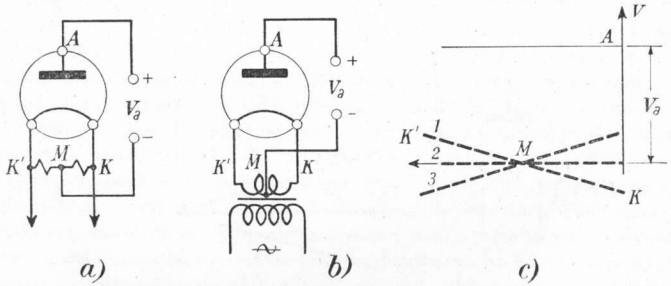


Fig. 69.5 – Distribuzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un diodo riscaldato direttamente con una sorgente di f.e.m. alternata e con ritorno del circuito anodico su un punto equipotenziale con il centro del catodo.

razione 1 alla configurazione 2, alla configurazione 3 di fig. 69.5, *c*). Tale variazione è a valor medio nullo per cui la tensione anodica risultante è costantemente uguale a V_a (ciò è accettabile con tanto maggiore approssimazione quanto più piccolo è V_{fM}). Da notare però che quest'ultimo provvedimento non elimina affatto gli inconvenienti dovuti alla variazione della temperatura del catodo riscaldato direttamente.

70. – Tipi più comuni di catodi termoelettronici e di anodi. Getter.

Le caratteristiche tecniche più importanti dei catodi termoelettronici sono:

a) la *durata utile* espressa in numero di ore di impiego, oltre il quale il catodo non funziona più regolarmente o per esaurimento o per danneggiamento di varia natura. Un valore normale della durata utile, per applicazioni correnti, è, ad esempio, di 5.000 ore;

b) *l'emissione specifica* o intensità di corrente emessa per unità di superficie catodica. Può variare da alcune unità ad alcune centinaia di mA/mm²;

c) *l'efficienza*, intesa come rapporto tra l'intensità di corrente di emissione I_s e la potenza P_f spesa per il riscaldamento del catodo. Può variare da alcune unità ad alcune centinaia di mA/W;

d) il rapporto tra la resistenza alla temperatura di normale funzionamento dell'elemento riscaldatore (filamento) e la resistenza a freddo del medesimo elemento. Può variare tra 5 e 15. Quando questo rapporto è grande occorre provvedere ad un graduale aumento del riscaldamento per evitare un iniziale eccessivo assorbimento di corrente.

I tipi più impiegati di catodi sono quelli di *tungsteno*, quelli di *tungsteno toriato* ed i cosiddetti *catodi ad ossidi*.

I catodi di *tungsteno* sono quelli più robusti, adatti a funzionare in tubi elettronici di grande potenza e sotto tensioni anodiche elevate. Essi presentano una lunga durata. A causa della loro bassa efficienza richiedono il riscaldamento diretto.

Per tubi elettronici di potenze intermedie si usano i catodi di *tungsteno toriato*. Sono costituiti da tungsteno con ossido di torio ($1 \div 2\%$). Il processo di attivazione, che consiste in un riscaldamento, porta alla formazione di uno strato monomolecolare di torio metallico sulla superficie emittente. Si ottiene così una diminuzione del potenziale intrinseco che risulta minore sia di quello del tungsteno che di quello del torio presi isolatamente; di conseguenza viene aumentata l'efficienza. Anche con questo tipo di catodi si usa il riscaldamento diretto.

Per tubi elettronici di più bassa potenza si usano i *catodi ad ossidi* con riscaldamento sia diretto che indiretto. Sono formati da un supporto di nikel ricoperto di ossidi di bario e stronzio; mediante un processo di attivazione raggiungono una elevata efficienza. Il punto debole di questo tipo di catodo sta nel fatto che il ricoprimento di ossidi viene facilmente disgregato o reso inattivo se su di esso cadono con forte velocità ioni positivi. Per tubi elettronici che usano questo tipo di catodo risultano quindi limitate sia la potenza anodica che la tensione anodo-catodo che è quella che accelera gli ioni verso il catodo.

Quest'ultimo inconveniente si verifica anche per i catodi di tungsteno toriato ma ad un livello più elevato di potenza e tensione, oltre il quale bisogna passare all'impiego dei catodi di tungsteno puro.

Esistono altri tipi di catodi usati per applicazioni speciali, ma i tre tipi suac-

cennati sono i più diffusi. La tabella seguente mette a confronto le caratteristiche dei tre tipi di catodi descritti.

Tipo di catodo	Emissione specifica (mA/mm²)	Efficienza (mA/W)	Rapporto di resistenze tra caldo e freddo	Temperatura di norm. funzionam. (°K)	Potenza anodica massima (W)	Tensione anodica massima (V)
Tungsteno	1÷6,5	2÷8	13÷14	2400÷2700	oltre 2000	20000
Tungsteno tor.	5÷35	30÷120	9	1800÷2400	2000	5000
Ossidi: risc. dir.	5÷120	600÷1000	5	1000÷1200	1000	2000
Ossidi: risc. indir.		50÷150				

Si è visto che in un diodo l'urto contro l'anodo degli elettroni accelerati dalla tensione anodica determina una dissipazione sull'anodo stesso sotto forma di calore dell'energia cinetica acquistata dagli elettroni incidenti. Gli anodi devono quindi essere formati da materiali che siano capaci di sopportare temperature elevate e nello stesso tempo di irraggiare una grande quantità di calore. I materiali ordinariamente usati sono il nikel carbonizzato od il ferro alluminato per i tubi di minore potenza; mentre per quelli di potenza intermedia si usano la grafite o meglio ancora il tantalio ed il molibdeno ricoperto di zirconio.

Per le potenze più elevate il problema del raffreddamento dell'anodo diviene più complesso. L'anodo diventa esterno o fa parte dell'involucro stesso. Si usa in questo caso il rame ed il raffreddamento può essere fatto ad aria ed in tal caso l'anodo è munito di alette per aumentare la superficie di irraggiamento, oppure può essere fatto ad acqua mediante circolazione di questa tra l'anodo ed una opportuna camicia metallica od ancora mediante spruzzamento.

Un'operazione molto importante che si compie sui tubi a vuoto è quella della svuotatura. Questa viene fatta riscaldando gli elettrodi affinché sia minimo il numero di molecole di gas che rimangono occluse nei pori dei materiali metallici e del vetro. Inoltre nel tubo si pone una particolare sostanza detta *getter* od *affinatore di vuoto* (ad esempio il bario od il magnesio) che ha la proprietà, sottoposta a riscaldamento, di combinarsi con i gas residui. Il getter è utile non solo durante l'operazione di svuotatura che ha luogo in sede costruttiva, ma anche durante il funzionamento del tubo continuando ad avere la proprietà di assorbire i gas che accidentalmente si liberano nell'interno del tubo. Si noti che gli anodi di tantalio e di molibdeno zirconiato, cui è stato accennato prima, posseggono spiccate qualità di getter.

71. – *Risoluzione grafica di circuiti con diodi.*

Allo scopo di affrontare la risoluzione di circuiti comprendenti elementi di caratteristica non lineare, come sono i diodi, conviene richiamare alcuni concetti utili per i procedimenti di risoluzione grafica. Si supponga ad esempio di dovere

risolvere il semplicissimo circuito rappresentato nella fig. 71.1. Esso consta di due resistenze poste in serie, di valore noto R_1 ed R_2 alimentate da una sorgente di f.e.m. continua di valore pure noto V_{ba}. Risolvere questo circuito significa determinare l'intensità di corrente I che interessa le due resistenze e le d.d.p. V_1 e V_2 che si stabiliscono ai capi delle resistenze. Le incognite del problema essendo tre, per risolvere analiticamente il problema occorre impostare tre equazioni che però si possono ridurre a due osservando che è: $V_2 = V_{ba} - V_1$.

Applicando ora la legge di Ohm a ciascuna delle due resistenze in serie, si può scrivere:

$$I = \frac{V_1}{R_1}$$

71.1

$$I = \frac{V_{ba} - V_1}{R_2}.$$

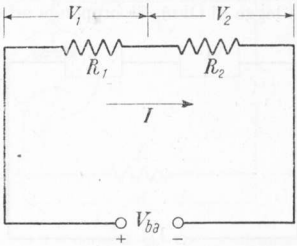


Fig. 71.1 – Semplice circuito costituito da due resistenze in serie ed alimentato da una sorgente di f.e.m. continua.

Sul piano (I, V_1) di fig. 71.2 le relazioni 71.1 rappresentano due rette, la prima delle quali passa per l'origine (nell'equazione non esiste termine noto) ed è inclinata sull'asse delle ascisse (V_1) di un angolo la cui tangente vale $1/R_1$, mentre la seconda retta interseca i due assi in punti facilmente determinabili

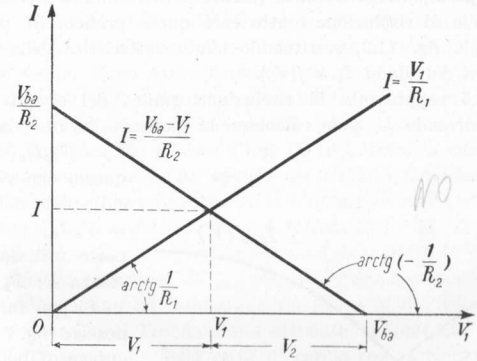


Fig. 71.2 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 71.1.

imponendo l'annullamento una volta della I ed una volta della V_1. Si ottiene così che la retta passa per i punti $(0, V_{ba}/R_2)$ e $(V_{ba}, 0)$, avendo come coefficiente angolare $-1/R_2$. L'intersezione delle due rette dà la soluzione del sistema, ossia I corrente circolante e V_1 tensione ai capi della resistenza R_1; il complemento di V_1 a V_{ba} rappresenta V_2.

È evidente che nel caso dell'esercizio esaminato precedentemente la risoluzione analitica è preferibile alla risoluzione grafica. La scelta del metodo di risoluzione può invece essere dubbia quando una o entrambe le relazioni che caratterizzano il comportamento degli elementi di circuito non sono lineari ma assumono una forma qualsiasi; ciò accade con elementi che non seguono la legge di Ohm. Si supponga ad esempio che l'elemento 1 di fig. 71.3 sia rappre-

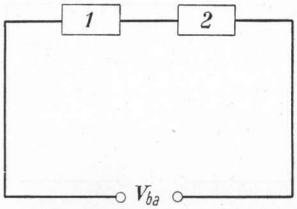


Fig. 71.3 – Circuito contenente un elemento di caratteristica non lineare.

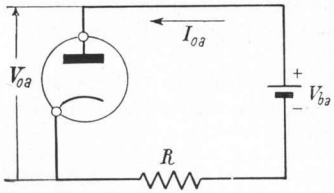


Fig. 71.4 – Serie di un diodo e di un resistore.

sentabile dall'equazione non lineare $I = f(V_1)$ mentre l'elemento 2 sia ancora una resistenza a caratteristica lineare. Secondo il tipo della relazione potrà essere preferibile la soluzione analitica o quella grafica. Ma nel caso in cui la $I = f(V_1)$ non sia analiticamente esprimibile in modo esatto (come nel caso del diodo) ma di essa si conosca solo la rappresentazione grafica ottenuta ad esempio sperimentalmente (caratteristica anodica del diodo) l'unico metodo possibile di risoluzione esatta sarà quello grafico. Si procederà ancora come nella fig. 71.2, sostituendo alla caratteristica della resistenza R_1 la caratteristica del diodo $I_a = f(V_a)$.

La fig. 71.5 rappresenta la risoluzione grafica del circuito indicato in fig. 71.4. Occorrendo si può calcolare la potenza fornita dal generatore $P_g = V_{ba}I_{0a}$, la frazione di questa che viene dissipata sull'anodo del diodo $P_a = V_{0a}I_{0a}$ e la rimanente parte utilizzata nella resistenza R: $P_R = RI_{0a}^2$.

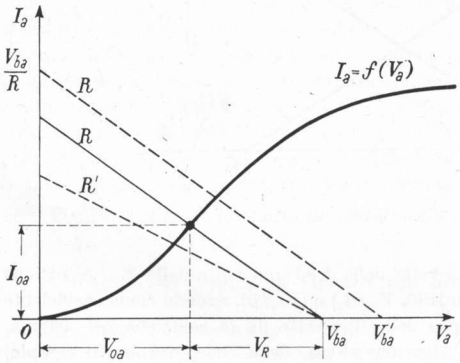


Fig. 71.5 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 71.4.

Si può facilmente riconoscere (fig. 71.5) che ad un aumento della resistenza $R(R')$ corrisponde un abbassamento della retta corrispondente (che assume il nome di *retta di carico*), pur partendo sempre da un punto V_{ba} sull'asse delle ascisse. Come casi limiti si

hanno quelli di resistenza R infinita, cui corrisponde una retta adagiata sull'asse delle ascisse e di resistenza nulla cui corrisponde una retta verticale (parallela all'asse delle ordinate) passante per V_{ba}. Se invece rimanendo costante R varia $V_{ba}(V'_{ba})$ ciò si traduce in uno spostamento della retta di carico parallelamente a se stessa, infatti il coefficiente angolare della retta rimane invariato ed uguale a $-1/R$.

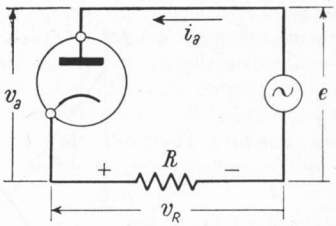


Fig. 71.6 – Serie di un diodo e di un resistore alimentata da una f.e.m. alternata.

Come applicazione si può studiare graficamente il circuito di fig. 71.6 che differisce da quello di fig. 71.4 per la presenza di una sorgente di f.e.m. alternata anziché continua. Poiché la f.e.m. applicata varia ora istante per istante, la retta di carico subirà anch'essa istante per istante una traslazione parallela a se stessa. Occorrerà per uno studio completo ripetere la costruzione grafica un numero sufficiente di volte (teoricamente infinite). Per agevolare lo studio conviene eseguire i diagrammi di fig. 71.7, dove in *a*) è la caratteristica anodica del diodo e la retta di carico (rappresentata più di una volta a causa delle variazioni di e); in *b*) si ha sia l'andamento nel tempo della f.e.m. applicata e, sia (ricavato mediante costruzione grafica da *a*)) l'andamento nel tempo della v_a ai capi del diodo. Per differenza tra la curva e e la curva v_a si ricava la curva v_R. Nel diagramma *c*) è stato ricavato l'andamento di i_a (che mediante opportuna variazione di scala delle ordinate può anche rappresentare v_R).

La costruzione dei diagrammi suddetti è stata ricavata punto per punto nel seguente modo. Dopo avere tracciato sul piano (I_a, V_a) la caratteristica anodica e sul piano (e, t) la funzione sinusoidale $e = E_M \operatorname{sen} \omega t$ si è preso sull'asse dei tempi un punto corrispondente all'istante generico t; per questo punto si è condotto una parallela all'asse e fino ad incontrare la curva delle e in un punto che rappresenta la f.e.m. agente nel circuito nell'istante considerato. Dal punto di intersezione così ottenuto si è innalzata una verticale fino ad incontrare l'asse V_a; da questo punto si è tracciata la retta di carico che deve passare per il punto $(0, e/R)$. Dall'intersezione della retta di carico con la caratteristica anodica (soluzione del problema nell'istante considerato) si è condotta una verticale fino ad intersecare sul piano (e, t) l'orizzontale condotta per il punto generico t: l'intersezione ottenuta rappresenta un punto della curva v_a. Dall'intersezione della retta di carico con la caratteristica anodica si è pure condotta una orizzontale fino ad incontrare la verticale passante per il punto t sul piano (i_a, t): l'intersezione ottenuta rappresenta un punto della curva i_a. Alcune osservazioni sono utili per completare l'esame del problema precedente. Per la ricerca di punti successivi delle diverse curve non sarà necessario calcolare ogni volta e/R, ma sarà sufficiente condurre una retta passante per il punto $(e, 0)$ e parallela alla retta di carico precedentemente tracciata. Quando e è negativa (ossia il generatore di f.e.m. alternata presenta il negativo

dalla parte dell'anodo del diodo) è inutile fare delle costruzioni grafiche in quanto si sa che in questo caso (avendo il diodo caratteristica unidirezionale) il diodo non conduce, quindi l'intensità di corrente i_a si annulla, la v_R si annulla (essendo $v_R = R \times i_a$) e la tensione v_a ai capi del diodo risulta uguale ad e. È interessante

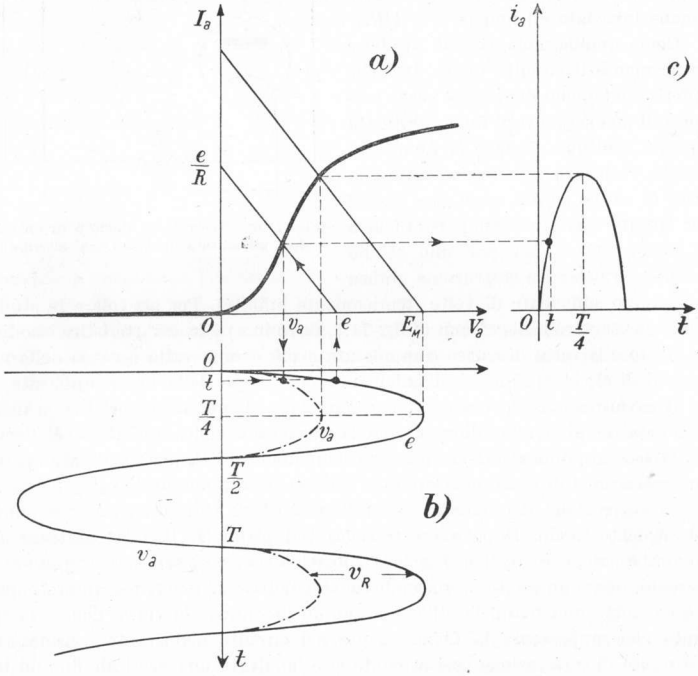


Fig. 71.7 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 71.6.

osservare che nel circuito di fig. 71.6 la massima tensione inversa cui è soggetto il diodo corrisponde al valor massimo della f.e.m. applicata al circuito E_M. Si può notare anche dall'esame della curva $v_a(t)$ che il valor medio di tale tensione presenta il negativo dalla parte dell'anodo ed il positivo dalla parte del catodo (infatti l'area negativa di v_a è maggiore dell'area positiva). L'unidirezionalità del diodo ha come conseguenza il *raddrizzamento* della tensione alternata applicata al circuito; difatti ai capi della resistenza R la tensione (pur non essendo continua, cioè a valore costante nel tempo) presenta invariate le sue polarità. Il diodo consente quindi di raddrizzare una tensione alternata

ossia di ottenere da una tensione alternata a valor medio nullo una tensione a valor medio diverso da zero [1].

L'impiego contemporaneo di due diodi consente il raddrizzamento di entrambe le semionde di una tensione alternata. Occorrono però contemporaneamente due generatori di f.e.m. collegati in serie tra loro ed in concordanza di fase (tali che la tensione agli estremi della serie sia in ogni istante uguale alla somma aritmetica delle tensioni parziali). Lo schema di questo circuito è rappresentato in fig. 71.8, *a*). I catodi dei due diodi sono collegati tra loro e da questo punto comune ha origine la resistenza di carico che all'altro estremo termina nel punto di collegamento tra i due generatori. Nel semiperiodo in cui la tensione totale presenta il positivo verso l'alto è in grado di condurre unicamente il diodo superiore; il circuito si chiude allora attraverso il generatore 1,

---

[1] Una volta risolto graficamente un circuito del tipo di quello di fig. 71.6, dividendo il periodo in k parti uguali e prendendo le ordinate corrispondenti agli istanti iniziali di ogni parte si possono calcolare approssimativamente, come indicato al paragrafo 1, le seguenti grandezze:

corrente anodica media

$$I_{am} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} i_{an}$$

tensione anodica media

$$V_{am} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} v_{an}$$

tensione media ai capi della R

$$V_{Rm} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} v_{Rn} = RI_{am}$$

corrente anodica efficace

$$I_a = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} i_{an}^2}$$

tensione efficace ai capi della R

$$V_R = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} v_{Rn}^2} = RI_a$$

potenza generata

$$P_g = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} e_n i_{an}$$

potenza anodica

$$P_a = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} v_{an} i_{an}$$

potenza utilizzata

$$P_u = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} v_{Rn} i_{an} = RI_a^2$$

rendimento del raddrizzamento

$$\eta = \frac{P_u}{P_g}.$$

il diodo 1 e la resistenza R. Nel semiperiodo successivo invece il diodo superiore rimane inattivo mentre il circuito si chiude attraverso il generatore 2, il diodo 2 e ancora attraverso la resistenza R. Quindi mentre i diodi conducono alter-

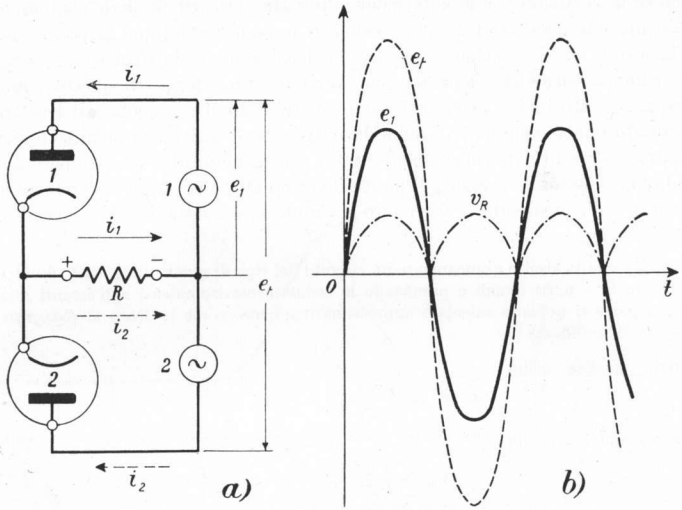


Fig. 71.8 – Circuito raddrizzatore di entrambe le semionde.

nativamente ciascuno per mezzo periodo, la resistenza di carico è costantemente interessata da una corrente unidirezionale. La fig. 71.8, *b*) rappresenta oltre la tensione totale dei due generatori e quella parziale di uno solo di essi, anche l'andamento nel tempo della tensione v_R ai capi della resistenza di

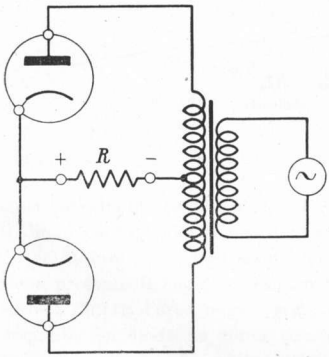


Fig. 71.9 – Circuito pratico per l'attuazione del circuito di fig. 71.8: il trasformatore sostituisce i due generatori.

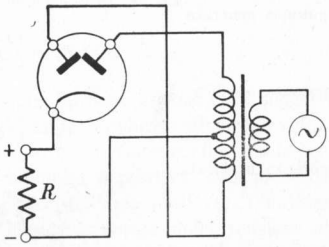


Fig. 71.10 – Semplificazione del circuito di fig. 71.9: un doppio diodo sostituisce i due diodi.

carico. Notare nella fig. 71.8, *a*) come la polarità positiva del carico sia dalla parte dei catodi. Per comodità i due generatori sono in realtà costituiti da un unico avvolgimento secondario di un trasformatore con presa centrale (fig. 71.9). Una ulteriore semplificazione del circuito si può ottenere usando anziché due distinti diodi una sola valvola detta *doppio diodo* che in un involucro unico contiene un catodo e due anodi. L'emettitore è sempre lo stesso, ma la corrente anodica (elettronica) viene convogliata ora verso un anodo ora verso l'altro secondo le polarità che istantaneamente ciascuno di questi presenta rispetto al catodo. La fig. 71.10 rappresenta lo schema di un circuito comprendente il trasformatore di alimentazione, il doppio diodo raddrizzatore e la resistenza di utilizzazione.

Si riprenderà lo studio dei raddrizzatori nel capitolo dedicato alle applicazioni dei diodi.

72. – *Osservazioni sui diodi a vuoto.*

È stato in precedenza accennato al fatto che anche in assenza di tensione applicata dall'esterno tra anodo e catodo di un diodo si può avere una corrente anodica di valore molto piccolo (ordine dei μA). Questa corrente anodica si dice *corrente di lancio*; essa si ha anche per tensioni anodiche leggermente negative, per cui la caratteristica anodica, ingrandita nelle vicinanze dell'origine degli assi coordinati (I_a, V_a) si presenta come in fig. 72.1. La tensione anodica negativa necessaria per annullare la corrente di lancio prende il nome di *potenziale di interdizione*. La corrente di lancio, per quanto piccola, può causare considerevoli cadute di tensione in circuiti nei quali siano presenti resistenze di notevole valore.

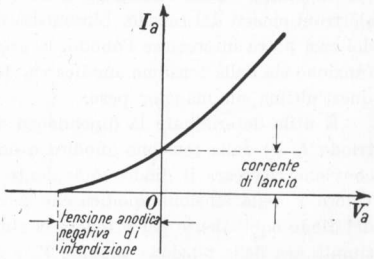


Fig. 72.1 – Corrente di lancio.

Nello studio dei circuiti con diodi, specialmente alle alte frequenze, occorre mettere in conto la capacità che si manifesta tra l'anodo ed il catodo che costituiscono le armature di un condensatore. Questa capacità interelettrodica è dell'ordine di qualche pF.

Si ricordi infine che la caratteristica anodica di un diodo subisce uno slittamento verso destra con l'invecchiamento del tubo stesso. Questo slittamento è più sensibile nelle prime due o trecento ore di funzionamento a causa delle modificazioni subite dalla superficie emittente del catodo. Successivamente lo slittamento si riduce e può stabilizzarsi su valori dell'ordine dei $10 \div 20$ mV/settimana.

73. - *Triodo.*

Il *triodo* è un tubo elettronico a vuoto che differisce dal diodo per l'aggiunta tra il catodo e l'anodo di un particolare elettrodo detto *griglia* (o griglia controllo) il cui nome deriva dalla sua particolare conformazione che è tale da permettere il passaggio di elettroni dal catodo verso l'anodo (attraverso i conduttori filiformi che costituiscono appunto le maglie della griglia). La fig. 73.1 rappresenta lo schema di un triodo a riscaldamento indiretto.

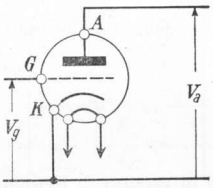


Fig. 73.1 - Triodo con riscaldamento indiretto.

Al triodo sono applicate due tensioni: quella anodica V_a tra anodo e catodo e quella di griglia V_g tra griglia e catodo. L'intensità di campo elettrico che agisce sugli elettroni emessi dal catodo è una combinazione della intensità di campo elettrico dovuta alla tensione di griglia V_g e della intensità di campo elettrico dovuta alla tensione anodica. Poiché la griglia è più vicina al catodo che non l'anodo il campo dovuto alla griglia sarà più intenso di quello dovuto all'anodo a parità di tensione di griglia V_g e tensione anodica V_a; ciò equivale a dire che la stessa intensità di campo può essere prodotta da una tensione di griglia V_g più bassa della tensione anodica V_a corrispondente. È chiaro dunque che la griglia agisce con maggior efficacia che non l'anodo nei riguardi degli elettroni emessi dal catodo. L'intensità di corrente nel triodo I_k (che a seconda dei casi potrà interessare l'anodo, la griglia od entrambi gli elettrodi) sarà una funzione sia della tensione anodica sia della tensione di griglia, avendo tuttavia quest'ultima un maggior peso.

È utile determinare la dipendenza della intensità di *corrente catodica* nel triodo I_k [1] dalla tensione anodica e dalla tensione di griglia. A questo scopo conviene ricercare il diodo equivalente al triodo in esame o meglio qual'è il valore V della tensione anodica che occorrerebbe applicare tra anodo e catodo del diodo equivalente per ottenere la stessa intensità di corrente I_k che l'azione simultanea della tensione anodica V_a e della tensione di griglia V_g produce nel triodo. La ricerca si svolge agevolmente, e con risultati praticamente soddisfacenti, per via elettrostatica riferendosi alle quantità di elettricità determinate sul catodo anziché alle intensità di corrente. Si indichino con C_{ak} e C_{gk} rispettivamente le capacità anodo-catodo e griglia-catodo del triodo; sul catodo si avrà una quantità di elettricità Q data ovviamente da:

$$Q = C_{ak}V_a + C_{gk}V_g \,. \tag{73.1}$$

Sarà equivalente al triodo quel diodo sul catodo del quale la tensione ano-

---

[1] Non bisogna confondere l'intensità di *corrente catodica* I_k, somma della corrente anodica I_a e della corrente di griglia I_g, con la *corrente di emissione* I_s che come nel diodo è funzione della temperatura assoluta T del catodo.

dica V determinerà la stessa quantità di elettricità Q che compare nella 73.1, ossia (supponendo che sia nel triodo che nel diodo si abbia la stessa capacità anodo-catodo C_{ak}):

73.2 $$Q = C_{ak} V \, .$$

Dalla uguaglianza delle 73.1 e 73.2 si ricava:

73.3 $$V = V_a + \frac{C_{gk}}{C_{ak}} V_g \, .$$

La 73.3 fornisce il valore da assegnare alla tensione anodica del diodo equivalente per avere sul suo catodo la stessa quantità di elettricità che nel triodo corrispondente, ed anche (per estensione sperimentalmente verificata) per avere nei due tubi elettronici la stessa intensità di corrente I_k. Il rapporto C_{gk}/C_{ak}, che per la maggior vicinanza della griglia al catodo è sempre maggiore dell'unità (numero senza dimensioni), si dice *coefficiente di amplificazione* del triodo e si indica con μ. La 73.3 diviene allora:

73.4 $$V = V_a + \mu V_g \, .$$

Si dà il nome di *potenziale globale* del triodo a V, combinazione lineare di V_a e di V_g.

Per le considerazioni fatte precedentemente si potrà scrivere $I_k = f(V)$ od anche $I_k = f(V_a + \mu V_g)$. La *caratteristica globale* del triodo (corrente I_k in funzione del potenziale globale V) è raffigurata in fig. 73.2. In essa si vede come anche per il triodo la caratteristica possa suddividersi in due parti, di cui la prima soddisfa approssimativamente la legge di Child:

73.5 $$I_k = K(V_a + \mu V_g)^{3/2}$$

dove K è una costante che dipende dalla configurazione del triodo; mentre la seconda parte (per potenziali globali superiori al potenziale globale di saturazione V_s) risulta indipendente dalla tensione e unicamente funzione della temperatura (intensità di corrente di saturazione).

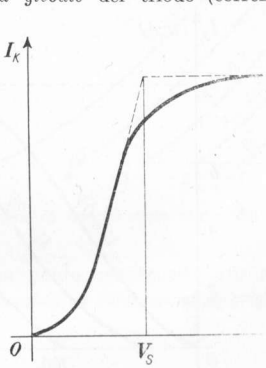


Fig. 73.2 - Caratteristica globale del triodo.

L'intensità di corrente I_k è l'intensità di corrente totale nel triodo e rappresenta l'intensità di corrente che superata la zona della carica spaziale (corrente elettronica) viene convogliata verso la griglia e verso l'anodo. Questa intensità di corrente si divide a sua volta in due parti: una rappresenta l'intensità di corrente di griglia I_g, l'altra invece l'intensità di corrente anodica I_a, legate

tra loro dalla relazione:

73.6 $$I_k = I_a + I_g \, .$$

Dei due termini, I_a ed I_g, può annullarsene uno se la rispettiva tensione, V_a oppure V_g, è negativa. Nella maggior parte dei casi nel funzionamento del triodo è negativa V_g per cui I_k si riduce a I_a .

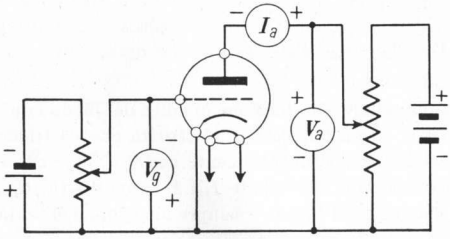


Fig. 73.3 – Circuito per il rilievo sperimentale delle caratteristiche anodiche e mutue del triodo.

Il potenziale globale può essere variato o variando il valore della tensione anodica V_a oppure variando il valore della tensione di griglia V_g . Se si assegna un valore costante alla tensione di griglia V_g, mentre si fa variare la tensione anodica V_a e si rilevano le coppie corrispondenti di valori (I_a, V_a) con V_g costante, si ottiene una *caratteristica anodica* del triodo. Di queste caratteristiche anodiche ne esistono infinite, una per ogni valore di tensione di griglia. Lo schema di fig. 73.3 presenta il circuito per il rilievo sperimentale delle caratteristiche

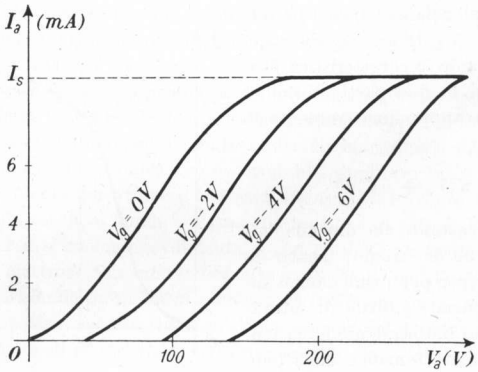


Fig. 73.4 – Famiglia di caratteristiche anodiche del triodo.

anodiche del triodo. Un insieme di caratteristiche anodiche, tracciate per diversi valori della tensione di griglia V_g, costituisce una *famiglia di caratteristiche anodiche* (fig. 73.4). Si noti come per tensioni di griglia via via più negative le varie caratteristiche si staccano dall'asse delle ascisse in punti situati sempre

più a destra. Ciò avviene poiché per avere intensità di corrente anodica è necessario che sia positivo il potenziale globale $V(V_a + \mu V_g > 0)$. La condizione limite che si ha ponendo uguale a zero il potenziale globale permette di ricavare, assegnata una certa tensione di griglia V_g, per quale minimo valore di tensione anodica V_a si inizia ad avere intensità di corrente. Questo particolare valore della tensione anodica V_{ai} si dice *potenziale anodico di interdizione* corrispondente alla assegnata tensione di griglia. Dalla condizione,

73.7 $$V_{ai} + \mu V_g = 0$$

si ricava

73.8 $$V_{ai} = -\mu V_g \, .$$

Se il potenziale globale del triodo viene invece variato mediante variazione della tensione di griglia, mantenendo costante la tensione anodica, e si rilevano le coppie corrispondenti di valori (I_a, V_g) con V_a costante, si ottiene una cosiddetta *caratteristica mutua*. Anche di queste caratteristiche ne esistono infinite, una per ogni valore della tensione anodica. Lo schema di fig. 73.3 serve anche per il rilievo delle caratteristiche mutue del triodo. Una famiglia di tali caratteristiche (limitate a tensioni negative di griglia) è rappresentata in fig. 73.5. Anche in questo caso ogni caratteristica si stacca in un punto diverso dall'asse delle ascisse. Questo punto corrisponde, per un assegnato valore della tensione anodica, al *potenziale di interdizione di griglia* V_{gi}. Ancora dalla condizione:

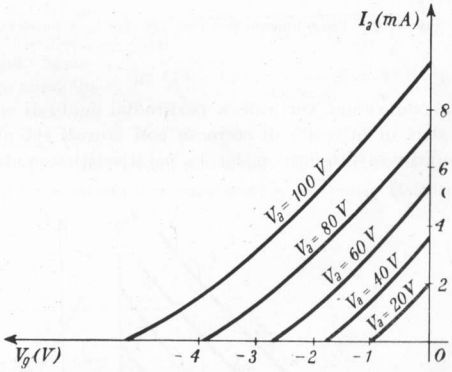


Fig. 73.5 – Famiglia di caratteristiche mutue del triodo.

73.9 $$V_a + \mu V_{gi} = 0$$

si ricava

73.10 $$V_{gi} = -\frac{V_a}{\mu} \, .$$

Una volta ricavata sperimentalmente una famiglia di caratteristiche anodiche si può ricavare una famiglia di caratteristiche mutue mediante un semplice

procedimento grafico, illustrato in fig. 73.6. Si voglia ad esempio tracciare una caratteristica mutua per una tensione anodica di 200 V. Nel piano (I_a, V_a)

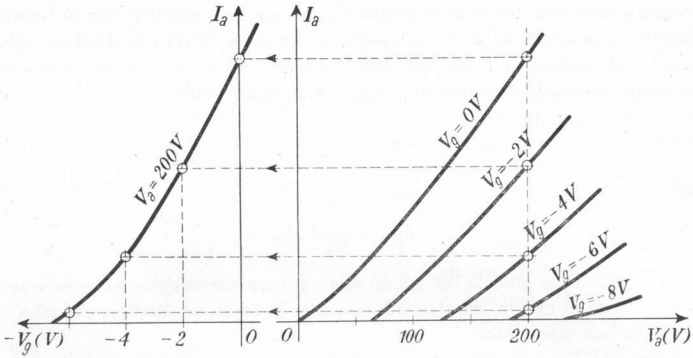


Fig. 73.6 – Procedimento per ricavare una caratteristica mutua da una famiglia di caratteristiche anodiche.

si conduce una verticale a partire dal punto di ascisse 200 V. Si riportino ora i valori di intensità di corrente così trovati sul piano (I_a, V_g). Congiungendo i punti così ottenuti si ha la caratteristica mutua desiderata. Analogamente

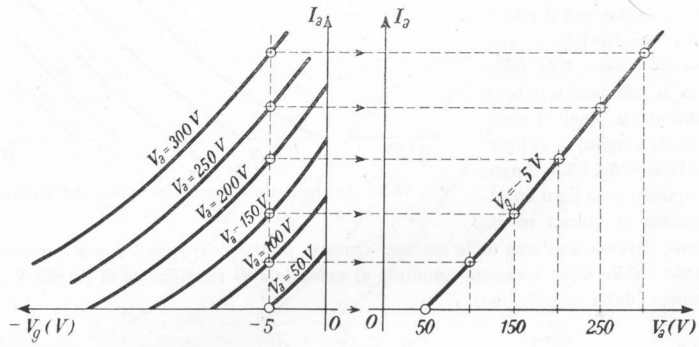


Fig. 73.7 – Procedimento per ricavare una caratteristica anodica da una famiglia di caratteritiche mutue.

possono tracciarsi altre caratteristiche mutue fino a costituire una famiglia.

Allo stesso modo da una famiglia di caratteristiche mutue trovate sperimentalmente si può dedurre graficamente una famiglia di caratteristiche anodiche. In fig. 73.7 è indicata la determinazione di una caratteristica anodica dalla

conoscenza di una famiglia di caratteristiche mutue. Il procedimento è di facile interpretazione.

Un'altra famiglia di caratteristiche del triodo che si usa in alcuni particolari studi grafici è quella delle *caratteristiche a corrente costante*, rappresentata in fig. 73.8. Anche queste ultime caratteristiche possono essere dedotte facilmente da una famiglia di caratteristiche anodiche o mutue.

La griglia è ordinariamente costituita da un sottile filo di nikel o molibdeno avvolto a spirale attorno al catodo.

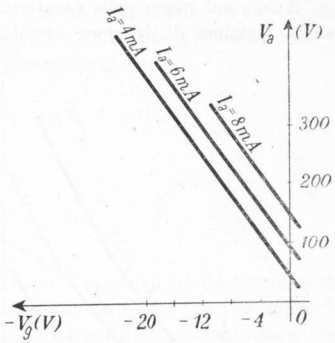


Fig. 73.8 – Caratteristiche a corrente costante.

74. – *Massima dissipazione anodica.*

La buona conservazione del triodo esige la limitazione (come nel diodo) della potenza dissipata sull'anodo. Quando sono date le caratteristiche anodiche di un triodo e se ne conosce la *massima dissipazione anodica* consentita P_{aM} (valore assegnato dal costruttore) si può tracciare sul piano delle caratteristiche anodiche la *curva* detta appunto *della massima dissipazione anodica*, che costituisce

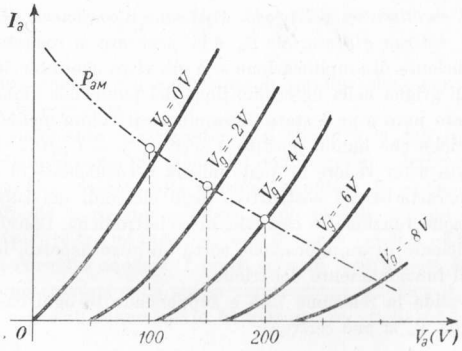


Fig. 74.1 – Curva della massima dissipazione anodica sul piano delle caratteristiche anodiche.

il confine che non deve essere superato nel normale funzionamento del triodo. Per tracciare la curva della massima dissipazione anodica (fig. 74.1) si assegnano

alcuni valori alla tensione anodica V_a e dalla relazione $I_a = P_{aM}/V_a$ si ricavano i corrispondenti valori di intensità di corrente anodica, che riportati sul diagramma e congiunti tra loro danno la curva desiderata.

Anche sul piano delle caratteristiche mutue può essere tracciata la curva della massima dissipazione anodica; ogni valore di intensità di corrente I_a calcolato con la relazione precedente va riportato sulla caratteristica mutua tracciata per la tensione anodica V_a che di volta in volta si fissa. Congiungendo questi punti si ottiene la curva desiderata: un esempio è riportato in fig. 74.2.

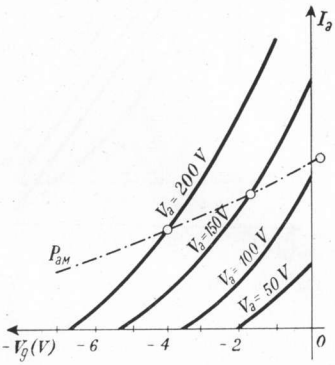


Fig. 74.2 – Curva della massima dissipazione anodica sul piano delle caratteristiche mutue.

75. – *Coefficienti caratteristici del triodo.*

Il comportamento di ogni triodo viene caratterizzato da alcuni valori particolari che sono determinanti nella scelta di un triodo anziché di un altro in relazione all'uso che se ne vuol fare. Questi valori particolari sono i cosiddetti *coefficienti caratteristici del triodo*. Essi sono il *coefficiente di amplificazione* μ, la *resistenza interna differenziale* R_a e la *pendenza o conduttanza mutua* S (o g_m). Del coefficiente di amplificazione si è già visto che interviene come peso del potenziale di griglia nella determinazione del potenziale globale del triodo. Esso è un numero puro e ne è stato determinato il valore mediante considerazioni elettrostatiche che hanno portato a scrivere $\mu = C_{gk}/C_{ak}$. La precedente relazione è adatta a far vedere in quale misura il coefficiente di amplificazione dipenda dalle caratteristiche costruttive degli elettrodi del tubo, delle quali evidentemente sono funzione le capacità interelettrodiche. Conviene pure considerare il coefficiente di amplificazione sotto un altro aspetto, idoneo ad illuminare meglio il funzionamento del triodo.

Ritenendo valida la relazione 73.5 e supponendo in ogni caso negativa la tensione di griglia V_g si può scrivere:

75.1 $$I_a = K(V_a + \mu V_g)^{3/2} .$$

Si dia ora un incremento (positivo o negativo) ΔV_a alla tensione anodica ed un incremento (positivo o negativo) ΔV_g alla tensione di griglia: nel caso più generale anche l'intensità di corrente anodica subirà un incremento ΔI^p

(positivo o negativo); e quindi sarà:

75.2 $$I_a + \Delta I_a = K(V_a + \Delta V_a + \mu V_g + \mu \Delta V_g)^{3/2} .$$

Affinché l'intensità di corrente anodica non subisca variazioni (ossia $\Delta I_a = 0$) occorre che le due variazioni ΔV_a e ΔV_g si facciano equilibrio tra loro, ossia occorre che i secondi membri delle relazioni 75.1 e 75.2 siano uguali tra loro, il che equivale ad imporre l'uguaglianza dei potenziali globali:

75.3 $$V_a + \mu V_g = V_a + \Delta V_a + \mu V_g + \mu \Delta V_g$$

da cui si ricava

75.4 $$\mu = -\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \quad (\Delta I_a = 0) .$$

Il coefficiente di amplificazione risulta quindi il rapporto tra due incrementi di tensione anodica e di griglia che si corrispondano in modo tale che applicati contemporaneamente mantengano invariata l'intensità di corrente anodica. Bisogna ancora notare che affinché la condizione precedente si realizzi i due incrementi corrispondenti devono essere di segno contrario e quindi, nonostante il segno negativo che compare al secondo membro della 75.4, il coefficiente di amplificazione ha sempre valore positivo.

Ordinariamente dei due incrementi si considerano i soli valori assoluti e di conseguenza davanti alla frazione si toglie il segno negativo. È quindi:

75.5 $$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \quad (\Delta I_a = 0) .$$

L'ordine di grandezza del coefficiente di amplificazione nei triodi è variabile dalle decine alle centinaia.

Un altro coefficiente caratteristico del triodo è la sua resistenza interna differenziale, definita come nel diodo dal reciproco della derivata della intensità di corrente anodica rispetto alla tensione anodica: $R_a = dv_a/di_a$. Per motivi pratici si confonde la resistenza interna differenziale con quella incrementale intesa come rapporto tra un incremento di tensione anodica ed il corrispondente incremento di corrente anodica. I punti estremi determinati da questi due incrementi devono trovarsi sulla stessa caratteristica anodica il che equivale ad imporre uguale a zero l'incremento di tensione di griglia ($\Delta V_g = 0$). Si potrà quindi scrivere

75.6 $$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \quad [\Omega, K\Omega] \quad (\Delta V_g = 0) .$$

La resistenza interna differenziale di un triodo è variabile dalle unità alle decine di $K\Omega$.

Infine di un triodo importa conoscere la pendenza S (o conduttanza mutua g_m) così denominata perché rappresenta appunto la pendenza delle caratteristiche mutue. Poiché ci si riferisce a punti di una stessa caratteristica mutua risulta nulla la variazione della tensione anodica ($\Delta V_a = 0$). È quindi:

75.7 $$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \quad \left[\frac{1}{\Omega}, \frac{mA}{V}, \frac{\mu A}{V}\right] \quad (\Delta V_a = 0) .$$

La pendenza di un triodo è dell'ordine delle unità di mA/V.

I valori dei coefficienti caratteristici del triodo possono essere ricavati dalle caratteristiche mutue o anodiche. Le figg. 75.1, 75.2 e 75.3 indicano come si

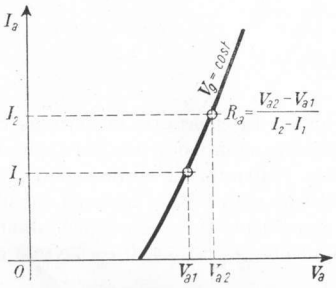


Fig. 75.1 – Determinazione della resistenza interna differenziale da una caratteristica anodica.

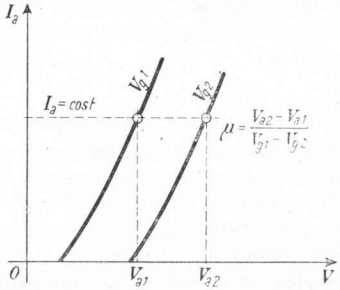


Fig. 75.2 - Determinazione del coefficiente di amplificazione da due caratteristiche anodiche.

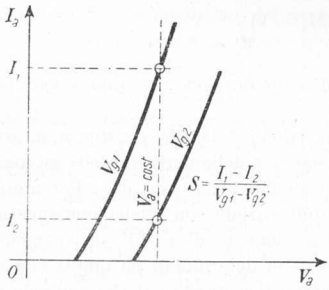


Fig. 75.3 – Determinazione della pendenza da due caratteristiche anodiche

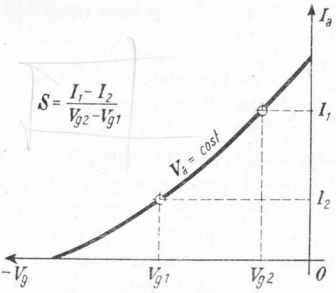


Fig. 75.4 – Determinazione della pendenza da una caratteristica mutua.

ricava rispettivamente la resistenza interna differenziale, il coefficiente di amplificazione e la pendenza dalle caratteristiche anodiche. Si noti che mentre per la determinazione della resistenza interna differenziale è sufficiente una sola caratteristica anodica, per la determinazione del coefficiente di amplificazione e della pendenza sono necessarie due caratteristiche anodiche.

Le figg. 75.4, 75.5 e 75.6 indicano come si ricavi rispettivamente la pendenza, la resistenza interna differenziale ed il coefficiente di amplificazione dalle caratteristiche mutue. Mentre per la determinazione della pendenza è sufficiente

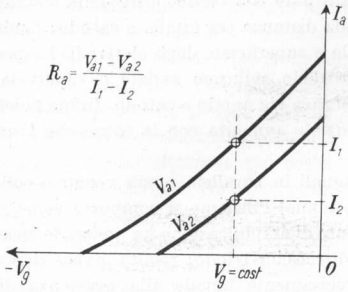


Fig. 75.5 – Determinazione della resistenza interna differenziale da due caratteristiche mutue.

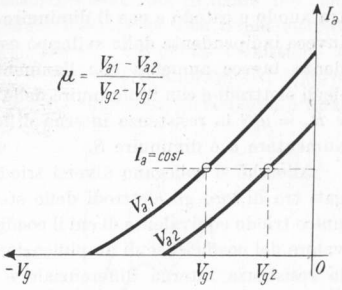


Fig. 75.6 – Determinazione del coefficiente di amplificazione da due caratteristiche mutue.

una sola caratteristica mutua, per la determinazione della resistenza interna differenziale e del coefficiente di amplificazione sono necessarie due caratteristiche mutue.

I coefficienti caratteristici del triodo non sono tra loro indipendenti ma legati dalla relazione:

75.8 $$\mu = R_a \cdot S \, .$$

Infatti, sostituendo ai coefficienti le espressioni ottenute dalla 75.5, dalla 75.6 e dalla 75.7, la espressione 75.8 risulta soddisfatta:

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \cdot \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \, .$$

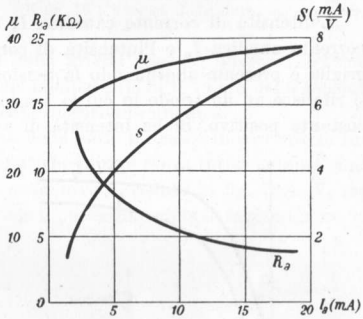


Fig 75.7 – Variazione dei coefficienti caratteristici di un triodo in funzione dell'intensità di corrente anodica.

Dall'esame delle caratteristiche anodiche e mutue è facile constatare che i coefficienti caratteristici del triodo non hanno lo stesso valore per tutte le condizioni di funzionamento ed inoltre l'esperienza insegna che i coefficienti caratteristici di un triodo variano con l'usura del catodo. Dei tre coefficienti caratteristici il più costante è il coefficiente di amplificazione che diminuisce solo un poco per intensità di corrente molto piccola, su di esso ha trascurabile influenza l'usura del catodo. La pendenza aumenta sensibilmente con l'aumentare dell'intensità di corrente e diminuisce con l'usura del catodo. Infine la resistenza interna differenziale diminuisce con l'aumentare dell'intensità di corrente ed aumenta con l'usura del catodo. La fig. 75.7 pone i coefficienti caratteristici di un triodo in relazione all'intensità di corrente anodica.

I coefficienti caratteristici del triodo dipendono dalla conformazione degli elettrodi. Si verifica che il coefficiente di amplificazione μ aumenta con l'aumentare del rapporto tra pieno e vuoto nella superficie formata dal conduttore avvolto che costituisce la griglia; aumenta pure con l'aumentare della distanza tra anodo e catodo e con il diminuire della distanza tra griglia e catodo; risulta invece indipendente dallo sviluppo assiale o superficiale degli elettrodi. La pendenza invece aumenta con l'aumentare dello sviluppo assiale o superficiale degli elettrodi e con il diminuire della distanza tra anodo e catodo. Infine poichè è $R_a = \mu/S$ la resistenza interna differenziale aumenta con le cause che fanno aumentare μ e diminuire S.

Allorchè si collegano diversi triodi uguali in parallelo (ossia vengono collegati tra di loro gli elettrodi dello stesso nome) l'insieme si comporta come un unico triodo equivalente di cui il coefficiente di amplificazione ha ancora lo stesso valore del coefficiente di amplificazione di ciascun triodo; risulta invece ridotta la resistenza interna differenziale e precisamente uguale alla resistenza differenziale di ogni triodo divisa per il numero di triodi collegati in parallelo. Infine per questo stesso numero risulta moltiplicata la pendenza di ogni triodo per dare la pendenza del triodo equivalente.

76. - *Emissioni secondarie.*

L'intensità di corrente catodica I_k è composta di due parti: l'intensità di corrente anodica I_a e l'intensità di corrente di griglia I_g. Questa corrente di griglia è presente allorquando la tensione di griglia V_g è positiva. La fig. 76.1 si riferisce ad un triodo in cui la tensione di griglia è mantenuta ad un valore costante positivo. Si ha intensità di corrente catodica I_k anche per tensione anodica negativa: in questo caso non esiste corrente anodica e l'intensità di corrente catodica I_k coincide con l'intensità di corrente di griglia I_g. Aumentando il valore della tensione anodica V_a, appena questa diviene positiva comincia ad aversi nel triodo corrente anodica di intensità I_a che aumenta con l'aumentare della tensione positiva, a scapito anche della intensità di corrente di griglia. Questa, dopo aver raggiunto il massimo valore per tensione anodica nulla, va diminuendo. Ciò avviene per il fatto che l'aumento della tensione anodica provoca un aumento del potenziale globale e conseguentemente un aumento della velocità con cui gli elettroni si muovono verso l'anodo: una parte sempre maggiore di essi può sfuggire all'attrazione della griglia per raggiungere l'anodo.

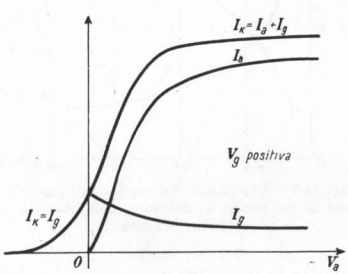


Fig. 76.1 – Suddivisione della corrente catodica di un triodo in corrente anodica e corrente di griglia in funzione della tensione anodica (trascurando l'emissione secondaria).

In realtà le caratteristiche tracciate in fig. 76.1 non tengono conto del fenomeno della *emissione secondaria*. Questa si verifica allorchè l'energia cinetica di un elettrone (primario) che va ad urtare contro un elettrodo è superiore al lavoro di estrazione del metallo che costituisce l'elettrodo, in modo che l'elettrone incidente cede nell'urto la sua energia cinetica ad uno o più elettroni (secondari) del metallo provocandone l'emissione. Nel triodo l'emissione secondaria potrà quindi avvenire dall'anodo e dalla griglia allorchè essi sono positivi ed il potenziale globale è tale da accelerare a sufficienza gli elettroni primari. Gli elettroni secondari risentono dell'attrazione dell'elettrodo più positivo la cui intensità di corrente vanno ad aumentare.

La fig. 76.2 indica come vengono modificate le curve delle intensità di corrente anodica e di griglia in seguito all'emissione secondaria. Per tensione anodica inferiore a V_1 il potenziale globale è insufficiente a provocare l'emissione secondaria. Per tensione anodica superiore a V_1 ma inferiore al valore costante della tensione di griglia V_2 l'emissione secondaria aumenta l'intensità di corrente della griglia essendo questo l'elettrodo più positivo. Quando invece la tensione anodica supera il valore della tensione di griglia V_2, risulta aumentata l'intensità di corrente anodica.

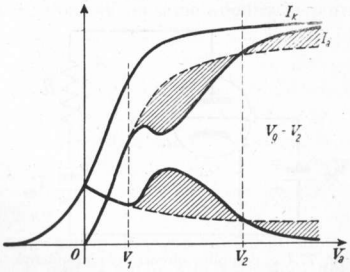


Fig. 76.2 – Modificazione delle caratteristiche di fig. 76.1 a causa della emissione secondaria.

La fig. 76.3 rappresenta l'andamento delle varie intensità di corrente in funzione di V_g ossia nel piano delle caratteristiche mutue senza tuttavia tener conto dell'emissione secondaria i cui effetti sono invece visibili in fig. 76.4. V_1 rappresenta il potenziale di griglia per il quale il potenziale globale raggiunge un va-

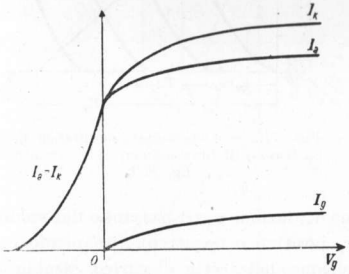


Fig. 76.3 – Suddivisione della corrente catodica di un triodo in corrente anodica e corrente di griglia in funzione della tensione di griglia (trascurando l'emissione secondaria).

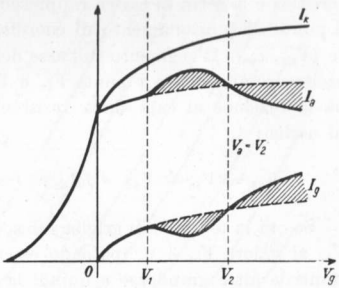


Fig. 76.4 – Modificazione delle caratteristiche di fig. 76.3 a causa della emissione secondaria.

lore sufficiente a produrre l'emissione secondaria, mentre V_2 rappresenta la tensione anodica costante.

È da tener presente che nel funzionamento normale dei triodi si evita di raggiungere le condizioni di emissione secondaria ora considerata.

77. – *Risoluzione grafica di circuiti con triodo.*

Sia dato il circuito di fig. 77.1. Essendo nota la tensione della batteria d'alimentazione anodica V_{ba}, la tensione di griglia V_{bg}, la resistenza di carico R ed avendo a disposizione le caratteristiche anodiche del triodo, si tratta di determinare le condizioni di funzionamento del triodo ossia la tensione anodica V_{0a} (d.d.p. tra anodo e catodo) e l'intensità di corrente anodica I_{0a}. Il punto che sul piano delle caratteristiche anodiche ha come coordinate V_{0a} e I_{0a} si dice *punto di funzionamento* o anche punto di riposo perchè determinato unicamente da valori di tensione e corrente costanti. La determinazione del punto di funzionamento per via grafica si esegue come nel caso del diodo tracciando la retta di carico (fig. 77.2) corrispondente alla resistenza R, determinata dalle sue intersezioni rispettivamente con l'asse delle ascisse $(V_{ba}, 0)$ e con l'asse delle ordinate $(0, V_{ba}/R)$. Poichè il triodo funziona con tensione di griglia V_{bg} la caratteristica interessata sarà quella tracciata appunto per tensione di griglia V_{bg}. L'intersezione M tra questa caratteristica e la retta di carico rappresenta il punto di funzionamento di coordinate (V_{0a}, I_{0a}). Il segmento sull'asse delle ascisse compreso tra i punti V_{ba} e V_{0a} dà la tensione ai capi della resistenza di carico:

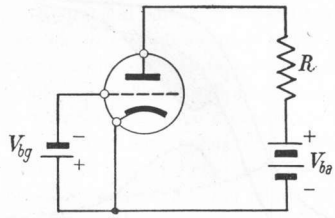


Fig. 77.1 – Semplice circuito comprendente un triodo ed una resistenza di carico.

$$V_{0R} = V_{ba} - V_{0a} = RI_{0a}\,.$$

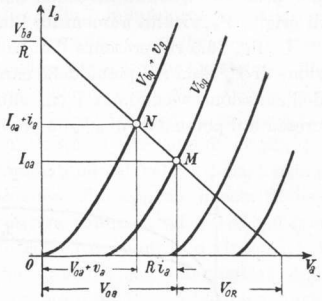


Fig. 77.2 – Determinazione grafica delle condizioni di funzionamento del circuito di fig. 77.1.

Se ora la tensione di griglia subisce una variazione v_g [1] passando dal valore V_{bg} al valore $V_{bg} + v_g$ (potendo essere v_g positivo o negativo), rimanendo costanti le altre grandezze e quindi la posizione della retta di carico, cambia la

[1] D'ora in avanti le variazioni di tensione e di corrente invece che con ΔV o ΔI verranno indicate con una lettera minuscola v o i, assumendo così il significato più generale di componenti variabili nel tempo.

caratteristica anodica interessata divenendo quella tracciata per tensione di griglia $V_{bg} + v_g$ per cui il punto di funzionamento si sposta, mantenendosi però sulla retta di carico (punto N di fig. 77.2).

L'intensità di corrente anodica passa dal valore I_{0a} al valore $I_{0a} + i_a$. Di conseguenza la tensione ai capi della resistenza R passa dal valore $V_{0R} = RI_{0a}$ al nuovo valore $V_R = R(I_{0a} + i_a) = RI_{0a} + Ri_a = V_{0R} + Ri_a$. L'aumento Ri_a della tensione ai capi della resistenza viene compensato da una diminuzione di ugual valore assoluto della tensione anodica dovendo in ogni caso essere uguale a V_{ba} la somma della tensione anodica e della tensione ai capi della resistenza di carico. Se si indica infatti con v_a la variazione di tensione anodica si potrà scrivere:

77.1 $$V_{0a} + v_a = V_{ba} - (V_{0R} + Ri_a),$$

da cui si ricava:

72.2 $$v_a = V_{ba} - V_{0R} - V_{0a} - Ri_a$$

che per la $V_{ba} = V_{0a} + V_{0R}$ diviene:

77.3 $$v_a = - Ri_a .$$

Le variazioni della tensione anodica sono perciò di segno contrario alle variazioni dell'intensità di corrente anodica e quindi anche alle variazioni della tensione di griglia.

La curva che pone meglio in evidenza la relazione tra le variazioni di intensità di corrente anodica e le variazioni della tensione di griglia è la cosiddetta *caratteristica mutua dinamica* tracciata sul piano delle caratteristiche mutue e che differisce dalle caratteristiche mutue statiche precedentemente considerate perchè queste ultime si riferiscono a resistenza di carico uguale a zero: $R = 0$. La fig. 77.3 rappresenta una caratteristica mutua dinamica indicandone

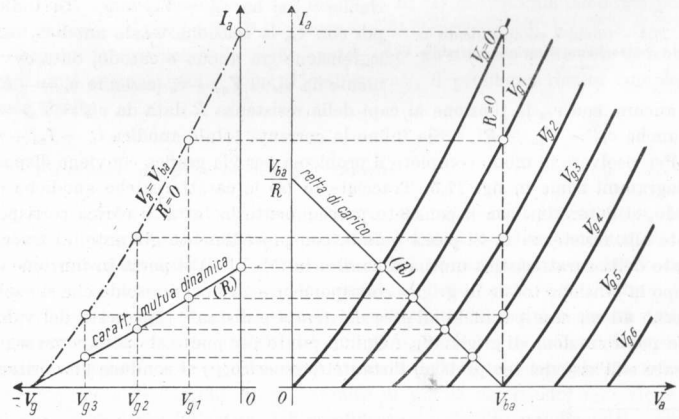


Fig. 77.3 – Procedimento per ricavare la caratteristica mutua dinamica dalla retta di carico tracciata sul piano delle caratteristiche anodiche.

la derivazione dalla retta di carico tracciata sul piano delle caratteristiche anodiche. È pure rappresentata a tratti la caratteristica mutua statica tracciata per tensione anodica pari a V_{ba}. Si noti come la pendenza della caratteristica mutua dinamica sia inferiore alla pendenza della caratteristica mutua statica. Ciò si verifica perchè quando la resistenza di carico è nulla (caratteristica mutua statica) una variazione di tensione di griglia non determina alcuna variazione della tensione anodica, mentre se la resistenza di carico è diversa da zero una variazione della tensione di griglia provoca una variazione di segno contrario della tensione anodica (a causa della caduta di tensione nella resistenza di carico) e quindi la variazione del potenziale globale dovuta alla tensione di griglia viene in parte compensata dalla variazione della tensione anodica. In definitiva ad una stessa variazione della tensione di griglia corrisponde in questo ultimo caso una minore variazione di intensità di corrente anodica (e ciò significa appunto minor pendenza).

Sia dato ora il circuito di fig. 77.4 che differisce da quello di fig. 77.1 per la presenza nel circuito di griglia di una tensione alternata sinusoidale di valore istantaneo $v_g = V_{gM}$ sen ωt che si aggiunge alla tensione costante V_{bg} detta *tensione di polarizzazione* di griglia. Si supponga che in valore assoluto sia $V_{gM} < V_{bg}$ in modo che la griglia non raggiunga mai valori positivi rispetto al catodo. Si vuole determinare come variano nel tempo l'intensità di corrente anodica, la tensione anodica e la tensione ai capi della resistenza R. Si indichi con v_{tg} la tensione totale di griglia, ossia la tensione tra griglia e catodo, equivalente alle tensioni continua V_{bg} e variabile v_g, si ha $v_{tg} = V_{bg} + v_g$. Si indichi poi con v_{ta} la tensione totale anodica, ossia la tensione tra anodo e catodo, data ovviamente da $v_{ta} = V_{0a} + v_a$ (essendo $v_a = -Ri_a$) ed ancora con v_{tR} la tensione ai capi della resistenza R data da $v_{tR} = V_{0R} - v_a$ od anche $v_{tR} = V_{0R} + Ri_a$. Sia infine la corrente totale anodica $i_{ta} = I_{0a} + i_a$.

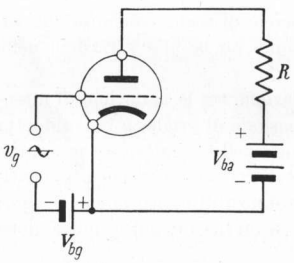


Fig. 77.4 – Circuito comprendente un triodo con tensione di griglia variabile.

Per risolvere in modo completo il problema per via grafica conviene disporre i diagrammi come in fig. 77.5. Tracciate in (*a*) le caratteristiche anodiche del triodo, si determina con il consueto procedimento la retta di carico corrispondente alla resistenza R. Si passa quindi, con procedimento già noto, al tracciamento della caratteristica mutua dinamica in (*b*). In (*c*) si porta in funzione del tempo la tensione totale di griglia corrispondente ad una sinusoide che si svolge attorno ad un asse parallelo all'asse dei tempi e distante da questo del valore della polarizzazione di griglia V_{bg}. Quindi punto per punto si opera come segue. Fissato sull'asse dei tempi di (*c*) l'istante t_1 generico [1] si conduce una orizzon-

[1] Nella fig. 77.5 si è scelto come istante t_1 quello corrispondente ai $3T/4$.

tale sino ad incontrare la v_{tg} nel punto C. Dal punto C si conduce una verticale fino ad intersecare in B la caratteristica mutua dinamica. L'orizzontale condotta per B individua sulla retta di carico di (a) il punto A. L'intersezione della ver-

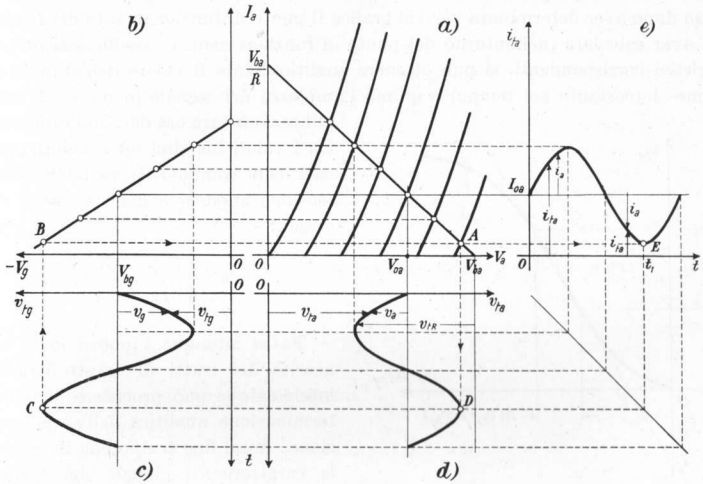


Fig. 77.5 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 77.4.

ticale condotta per A e della orizzontale condotta per C individua su (d) il punto D che rappresenta compiutamente per l'istante t_1 la v_{ta}, la v_a, la v_{tR}. Infine l'orizzontale condotta per A interseca in (e) la verticale condotta per il punto di ascisse t_1 nel punto E che permette di conoscere la i_{ta} e la i_a.

Eseguita la costruzione in modo analogo per un numero sufficiente di istanti e congiunti ordinatamente i punti così trovati, il problema risulta completamente risolto.

78. – *Funzione amplificatrice del triodo.*

Si è visto che il triodo fa corrispondere alla componente variabile v_g della tensione di griglia una componente variabile della tensione anodica v_a. Si dice *amplificazione* del triodo il rapporto A tra la componente variabile della tensione anodica v_a e la componente variabile della tensione di griglia: $A = v_a/v_g$. Questo rapporto, a causa della non linearità dei tratti di caratteristiche interessate al funzionamento del triodo, può assumere un valore diverso da istante ad istante il che significa che la forma della tensione applicata nel circuito d'ingresso dell'amplificatore (circuito di griglia del triodo) non viene fedelmente riprodotta all'uscita dell'amplificatore (circuito anodico del triodo). In questo caso si dice che esiste una *distorsione di non linearità*: la determina-

zione esatta della tensione anodica si può fare soltanto per via grafica come indicato nella fig. 77.5. Se invece durante il funzionamento del triodo amplificatore vengono interessati solo tratti rettilinei delle caratteristiche, la forma d'onda in uscita riproduce esattamente la forma d'onda in ingresso. In questo caso dopo aver determinato per via grafica il punto di funzionamento del triodo ed aver calcolato (nell'intorno del punto di funzionamento) i coefficienti caratteristici corrispondenti, si può ottenere analiticamente il valore dell'amplificazione A (costante nel tempo) e quindi l'ampiezza del segnale in uscita. L'amplificazione sarà ora data dal rapporto tra i valori massimi od i valori efficaci delle componenti variabili della tensione anodica e della tensione di griglia:

$$A = \frac{V_{aM}}{V_{gM}} = \frac{V_a}{V_g}$$

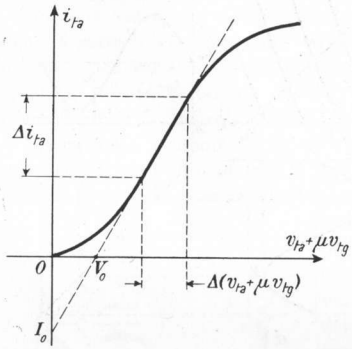


Fig. 78.1 – Caratteristica globale del triodo e retta tangente alla parte rettilinea.

Fatta adunque l'ipotesi della linearità dei tratti di caratteristiche interessate si può procedere alla determinazione analitica dell'amplificazione. A tal fine si riprenda in esame la caratteristica globale del triodo (fig. 78.1) riportando in ordinate l'intensità di corrente anodica i_{ta} (1) con la quale si identifica l'intensità di corrente catodica i_{tk} allorchè (come si suppone nel nostro caso) la tensione totale di griglia non raggiunge valori positivi. Si può scrivere ora l'espressione analitica della retta con la quale si può confondere il tratto rettilineo della caratteristica. Indicando con I_0 il segmento intercetto dalla retta sull'asse delle ordinate e con m il coefficiente di inclinazione della retta, risulta:

78.1 $$i_{ta} = I_0 + m(v_{ta} + \mu v_{tg}) \quad (1)$$

Il coefficiente di inclinazione della retta è:

78.2 $$m = \frac{\Delta i_{ta}}{\Delta(v_{ta} + \mu v_{tg})}.$$

Sia che il potenziale globale varii a causa di una variazione della sola tensione anodica (caratteristiche anodiche) oppure a causa di una variazione della

(1) Si indicano con i_{ta}, v_{ta} e v_{tg} le grandezze in esame perchè nel caso più generale esse sono composte da una componente continua e da una componente variabile, secondo quanto visto nel paragrafo precedente.

sola tensione di griglia (caratteristiche mutue) il coefficiente di inclinazione risulta:

78.3 $$m = \frac{1}{R_a}.$$

Infatti

$$m = \frac{\Delta i_{ta}}{\Delta v_{ta}} = \frac{1}{R_a}$$

oppure

$$m = \frac{\Delta i_{ta}}{\mu \cdot \Delta v_{tg}} = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{R_a}.$$

Sostituendo la (78.3) nella (78.1) si ottiene *l'equazione di Vallauri*:

78.4 $$i_{ta} = I_0 + \frac{1}{R_a}(v_{ta} + \mu v_{tg}),$$

che si può anche scrivere sotto la forma

78.5 $$R_a i_{ta} = R_a I_0 + v_{ta} + \mu v_{tg}$$

od anche, ponendo $V_0 = R_a I_0$ (1):

78.6 $$R_a i_{ta} = V_0 + v_{ta} + \mu v_{tg}.$$

Come è stato detto i simboli della intensità di corrente anodica e delle tensioni anodica e di griglia che compaiono nella equazioni di Vallauri si riferiscono all'intensità anodica totale ed alle tensioni totali.

Nel caso più generale è:

$$v_{tg} = V_{bg} + v_g\,; \qquad i_{ta} = I_{0a} + i_a\,; \qquad v_{ta} = V_{0a} + v_a\,;$$

mentre in condizioni di riposo (assenza di tensione variabile nel circuito di griglia: $v_g = 0$), risulta:

$$v_{tg} = V_{bg}\,; \qquad i_{ta} = I_{0a}\,; \qquad v_{ta} = V_{0a}.$$

Sostituendo nella equazione di Vallauri una volta i valori corrispondenti alle condizioni di lavoro ed una volta i valori corrispondenti alle condizioni di

(1) Si osservi che I_0 e V_0, pur avendo le dimensioni rispettivamente di una intensità di corrente e di una tensione, non hanno nessun significato fisico, ma solamente geometrico. È sufficiente notare a questo scopo che I_0 è negativa, contrariamente ad una effettiva corrente anodica.

riposo si ottiene:

78.7 $$R_a I_{0a} + R_a i_a = V_0 + V_{0a} + v_a + \mu V_{bg} + \mu v_g$$

e

78.8 $$R_a I_{0a} = V_0 + V_{0a} + \mu V_{bg} .$$

Sottraendo ora dalla 78.7 la 78.8 si ricava:

78.9 $$R_a i_a = v_a + \mu v_g .$$

L'espressione 78.9 è molto importante. Essa mette le componenti variabili delle grandezze elettriche che intervengono nel funzionamento del triodo in relazione tra loro e con i coefficienti caratteristi del triodo. Sostituendo a v_a la sua espressione $v_a = - Ri_a$ si ottiene:

78.10 $$R_a i_a = - Ri_a + \mu v_g$$

dalla quale si ricava

78.11 $$i_a = \frac{\mu v_g}{R_a + R} .$$

La 78.11 dice che, per quanto riguarda le componenti variabili, il triodo si comporta come un generatore di f.e.m. μv_g e resistenza interna R_a chiuso su una resistenza di carico R. La fig. 78.2, *a*) rappresenta il circuito equivalente

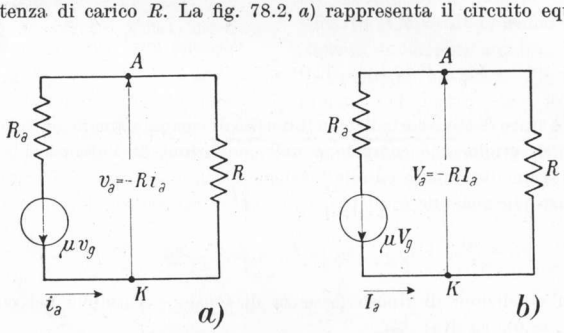


Fig. 78.2 – Circuito equivalente del triodo.

del triodo per le componenti variabili. La fig. 78,2, *b*) è identica, ma, riferita a variazioni sinusoidali, mette in conto i valori efficaci.

I versi delle frecce indicanti la f.e.m. μv_g e l'intensità di corrente sono scelti in modo che sia verificata anche come segno la $v_a = - Ri_a$. Sostituendo in quest'ultima relazione alla i_a il suo valore ricavato dalla 78.11 si ottiene

78.12 $$v_a = - \frac{R \cdot \mu v_g}{R_a + R}$$

e quindi, essendo $A = v_a/v_g$:

78.13 $$A = -\frac{\mu R}{R_a + R}.$$

Il segno meno che compare nella 78.13 sta ad indicare l'opposizione di fase che si verifica tra la tensione di griglia e la tensione anodica. Secondo le ipotesi

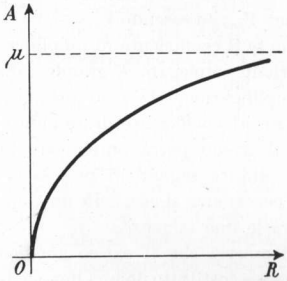


Fig. 78.3 – Variazione della amplificazione in funzione della resistenza di carico.

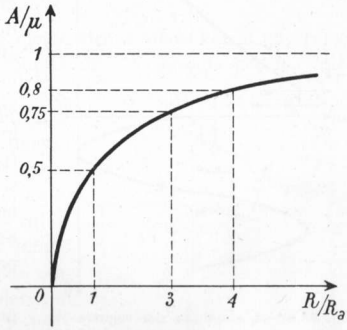


Fig. 78.4 – Curva universale: variazione del rapporto adimensionale A/μ in funzione del rapporto pure adimensionale R/R_a.

fatte l'espressione A così determinata rappresenta il rapporto sia tra i valori istantanei delle tensioni, sia tra i valori massimi ed i valori efficaci.

Dalla 78.13 si rileva che il valore assoluto della amplificazione A è una funzione crescente della resistenza di carico R e tende, per R tendente ad infinito, al valore del coefficiente di amplificazione μ. La fig. 78.3 rappresenta la funzione $A = f(R)$. Per avere una rappresentazione universale conviene porre $A/\mu = f(R/R_a)$: questa funzione (valida per qualsiasi triodo) è rappresentata in fig. 78.4. Da essa si rileva come oltre un certo valore il vantaggio che si ottiene aumentando la resistenza di carico R è insignificante. Si può anzi aggiungere che tale aumento può compromettere il funzionamento lineare del triodo, come si vede dalla fig. 78.5 dalla quale risulta che mentre la retta di carico

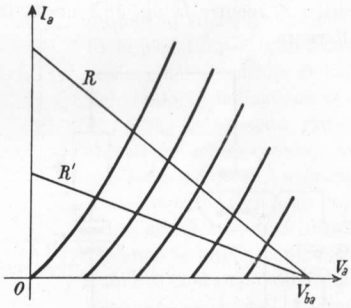


Fig. 78.5 – Se la resistenza di carico è troppo elevata, la retta di carico interseca le caratteristiche anodiche in tratti non rettilinei dando luogo a distorsione se il segnale da amplificare non è di piccola ampiezza.

corrispondente alla resistenza R, di valore normale, interseca le caratteristiche nei tratti rettilinei, la retta di carico corrispondente alla resistenza R', di valore eccessivo, interseca le caratteristiche nei tratti curvilinei.

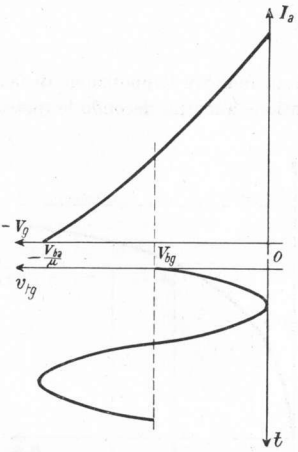


Fig. 78.6 – L'ampiezza del segnale che può essere convenientemente amplificato da un triodo è tanto minore quanto maggiore è il coefficiente di amplificazione.

Dall'esame di una caratteristica mutua dinamica (fig. 78.6) si può osservare che il segnale variabile applicato in griglia non deve fare in modo che la tensione totale di griglia scenda al di sotto del potenziale di interdizione corrispondente alla tensione di alimentazione V_{ba}; ed essendo $V_{gi} = -V_{ba}/\mu$ ne segue che se il coefficiente di amplificazione del triodo impiegato è grande sarà grande l'amplificazione da esso ottenuta (proporzionale al coefficiente di amplificazione), ma il triodo potrà amplificare linearmente soltanto segnali di piccola intensità. All'occorrenza si cercherà un compromesso tra le due esigenze.

Infine si osservi che il carico anodico può anche essere costituito da una impedenza $\overline{Z}$ anzichè da una semplice resistenza R.

In questo caso dopo aver determinato il punto di funzionamento a riposo (solo componenti costanti) ed i relativi valori dei coefficienti caratteristici, si determina l'amplificazione sostituendo nel circuito equivalente di fig. 78.2 l'impedenza $\overline{Z}$ alla resistenza R e rappresentando le varie grandezze elettriche con i corrispondenti valori complessi onde tener conto delle relazioni di fase. La fig. 78.7 rappresenta il circuito con triodo amplificatore ed impedenza di carico $\overline{Z}$, mentre la fig. 78.8 ne dà il circuito equivalente per le componenti alternate.

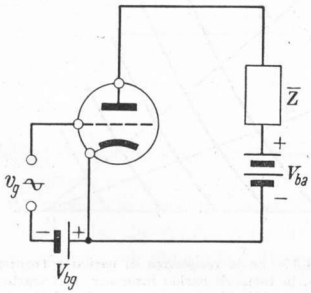


Fig. 78.7 – Triodo amplificatore con impedenza di carico.

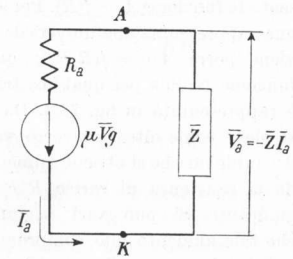


Fig. 78.8 – Circuito equivalente (per le componenti alternate) del circuito di fig. 78.7.

L'espressione della amplificazione sarà ora:

78.14 $$\bar{A} = -\frac{\mu \bar{Z}}{R_a + \bar{Z}}.$$

Lo studio dell'amplificazione verrà ripreso nella parte dedicata alle applicazioni dei tubi elettronici.

79. – *Tetrodo a griglia schermo.*

Il *tetrodo a griglia schermo* è un tubo elettronico a vuoto che si può considerare derivato dal triodo mediante l'aggiunta di una seconda griglia, detta *griglia schermo*, posta tra la prima griglia (o griglia controllo) e l'anodo (fig. 79.1). L'aggiunta di questa seconda griglia, che nel funzionamento normale del tetrodo viene portata ad un potenziale costante positivo rispetto al catodo, ha lo scopo di eliminare (o per quanto possibile ridurre) la capacità griglia-anodo. Nel triodo infatti la presenza di questa capacità griglia-anodo causa un accoppiamento capacitivo tra circuito di uscita anodico e circuito d'ingresso di griglia e perturba il funzionamento del triodo stesso. La griglia schermo del tetrodo invece funziona da schermo elettrostatico facendo in modo che il campo elettrico esistente tra griglia schermo e anodo sia indipendente dal campo elettrico presente tra griglia schermo e griglia controllo (1).

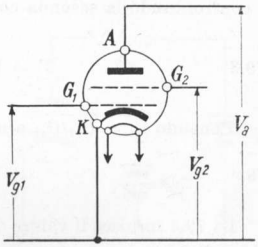


Fig. 79.1 – Tetrodo a griglia schermo.

La determinazione del potenziale globale del tetrodo si può effettuare con considerazioni elettrostatiche usando lo stesso procedimento impiegato per la determinazione del potenziale globale del triodo. Si indichi con C_{aK}, C_{g2} e C_{g1} le capacità rispettivamente anodo-catodo, griglia schermo-catodo e griglia controllo-catodo e si passi dapprima al triodo equivalente eliminando la griglia controllo e quindi al diodo equivalente eliminando la griglia schermo (fig. 79.2). Ritenendo costanti nei diversi passaggi le capacità C_{g2} e C_{aK}, si

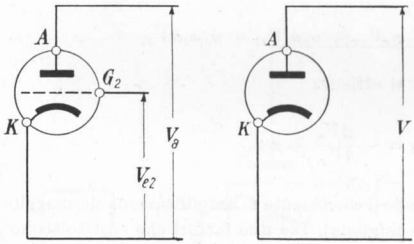


Fig. 79.2 – Triodo e diodo equivalenti al tetrodo a griglia schermo.

(1) Oltre questo vantaggio il tetrodo ne presenta altri nei confronti del triodo: verranno esaminati più avanti.

potrà scrivere rispettivamente per il tetrodo, il triodo equivalente ed il diodo equivalente:

$$Q = C_{aK}V_a + C_{g2}V_{g2} + C_{g1}V_{g1}\,;$$

79.1 $$Q = C_{aK}V_a + C_{g2}V_{e2}\,;$$

$$Q = C_{aK}V\,.$$

Dal confronto della prima delle 79.1 con la seconda si ricava:

79.2 $$V_{e2} = V_{g2} + \frac{C_{g1}}{C_{g2}}V_{g1}$$

e confrontando la seconda con la terza:

79.3 $$V = V_a + \frac{C_{g2}}{C_{aK}}V_{g2} + \frac{C_{g2}}{C_{aK}}\frac{C_{g1}}{C_{g2}}V_{g1}\,.$$

Ponendo $\mu_1 = C_{g1}/C_{g2}$ e $\mu_2 = C_{g2}/C_{aK}$, l'espressione precedente diviene:

79.4 $$V = V_a + \mu_2 V_{g2} + \mu_2\mu_1 V_{g1}\,.$$

La 79.4 fornisce il valore del potenziale globale del tetrodo a griglia schermo. Il coefficiente μ_1 rappresenta la maggior efficacia della griglia controllo nei riguardi della griglia-schermo, il coefficiente μ_2 la maggior efficacia della griglia schermo nei riguardi dell'anodo, il prodotto $\mu_1 \cdot \mu_2$ la maggior efficacia della griglia controllo nei riguardi dell'anodo. Il prodotto $\mu_1 \cdot \mu_2$ si può indicare con μ ed è il coefficiente di amplificazione del tetrodo come si può facilmente vedere dando un incremento ΔV_a alla tensione anodica ed un incremento ΔV_g alla tensione di griglia in modo che rimanga invariato il potenziale globale. Si ha:

79.5 $$V = V_a + \Delta V_a + \mu_2 V_{g2} + \mu_1\mu_2 V_{g1} + \mu_1\mu_2\Delta V_{g1}$$

e confrontando la 79.5 con la 79.4 si ottiene:

79.6 $$\mu_1\mu_2 = -\frac{\Delta V_a}{\Delta V_{g1}} = \mu\,.$$

Si rileva quindi come in un tetrodo il coefficiente di amplificazione sia maggiore che nel triodo (dalle centinaia alle migliaia). Dei due fattori che costituiscono μ il più grande è μ_2 a causa della fitta magliatura della griglia schermo. Ciò porta ad un grande vantaggio. Infatti il potenziale di interdizione di griglia che si può ricavare dalla 79.5 imponendo l'annullamento del potenziale globale ha la forma:

79.7 $$V_{gi} = -\frac{V_a}{\mu_1\mu_2} - \frac{V_{g2}}{\mu_1}$$

e poichè ordinariamente V_{g2} è dello stesso ordine di grandezza di V_a (due o tre volte inferiore) mentre μ_2 è dell'ordine delle decine, si ha $V_{g2}/\mu_1 \gg V_a/\mu_1\mu_2$ e quindi:

$$V_{gi} \simeq -\frac{V_{g2}}{\mu_1} \tag{79.8}$$

ossia il potenziale di interdizione di griglia è quasi indipendente dalla tensione anodica ed è assai più grande in valore assoluto di quello che si avrebbe in un triodo a parità di tensione anodica e coefficiente di amplificazione $(-V_a/\mu)$. In definitiva il tetrodo amplifica più del triodo ed ammette nel suo circuito di griglia un segnale maggiore.

Infine la preponderanza della tensione di griglia schermo nei confronti della tensione anodica nella determinazione del valore del potenziale globale $(\mu_2 V_{g2} \gg V_a)$ fa sì che la variazione della tensione anodica conseguente ad una variazione della tensione di griglia in un circuito in cui il tetrodo funziona come amplificatore (fig. 79.3) sia poco risentita nella variazione del potenziale globale per cui praticamente, a differenza di quanto avviene per il triodo (fig. 77.3), per il tetrodo la caratteristica mutua dinamica coincide sensibilmente con la caratteristica mutua statica.

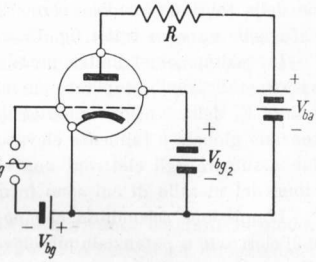


Fig. 79.3 – Circuito amplificatore con tetrodo a griglia schermo.

Lo schema di fig. 79.4 rappresenta il circuito per il rilievo sperimentale delle caratteristiche del tetrodo a griglia schermo. Variando il valore della tensione della griglia schermo si possono avere infinite famiglie di caratteristiche anodiche

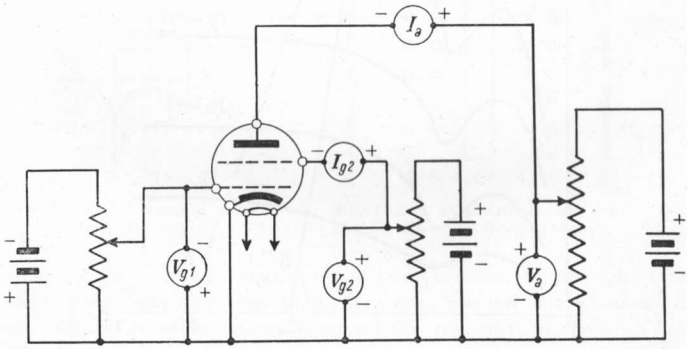


Fig. 79.4 – Circuito per il rilievo delle caratteristiche del tetrodo a griglia schermo.

e di caratteristiche mutue. Tuttavia la tensione di griglia schermo di normale funzionamento viene suggerita dal costruttore: ci si riduce così, come nel triodo, ad una sola famiglia di caratteristiche anodiche e ad una sola famiglia di caratteristiche mutue.

Sia adunque fissata la tensione di griglia schermo ad un valore positivo costante. Supposta negativa la tensione di griglia controllo, si ha $I_k = I_a + I_{g2}$.

Qualora non si manifestasse il fenomeno della emissione secondaria l'intensità di corrente anodica e quella di griglia schermo varierebbero in funzione della tensione anodica come indicato nelle curve a tratti fig. 79.5.

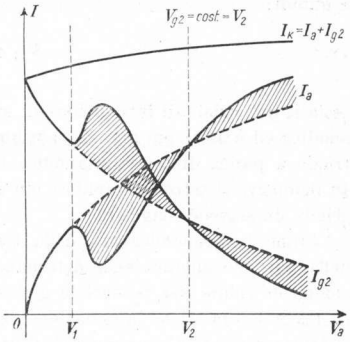


Fig. 79.5 – Irregolarità nelle caratteristiche del tetrodo a griglia schermo dovute all'emissione secondaria.

In realtà, come d'altra parte si è visto per il triodo, superato un certo valore V_1 della tensione anodica il potenziale globale è talmente elevato da far assumere agli elettroni una energia cinetica superiore al lavoro di estrazione del metallo di cui sono formati gli elettrodi.

L'emissione secondaria che ne consegue incrementa l'intensità di corrente dell'elettrodo a potenziale più elevato, ossia l'intensità di griglia schermo finchè V_a è inferiore alla tensione di griglia schermo V_2 ed invece l'intensità anodica dopo che la tensione anodica ha superato la tensione V_2. La fig. 79.6 rappre-

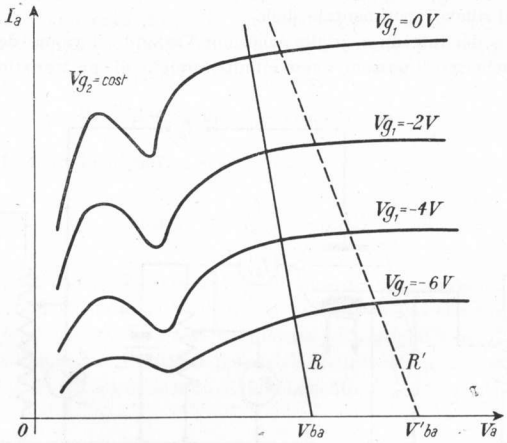


Fig. 79.6 – Famiglia di caratteristiche anodiche del tetrodo a griglia schermo.

senta una famiglia di caratteristiche anodiche. Un grave inconveniente presentato da questa caratteristica è il tratto a resistenza interna differenziale negativa (variazione di tensione anodica di segno discorde dalla corrispondente variazione di intensità di corrente anodica). Ovviamente tale tratto non può essere utilizzato nel funzionamento del tetrodo quale amplificatore lineare. Nella fig. 79.6 la retta R sta ad indicare la resistenza di valore maggiore che consente il funzionamento lineare del tetrodo per una assegnata tensione di alimentazione anodica V_{ba}. Se si vuole aumentare il valore della resistenza di carico portandola al valore R' occorre anche aumentare la tensione d'alimentazione V_{ba}. Bisogna pure tener presente che diminuendo la tensione di griglia schermo le caratteristiche anodiche si abbassano ma si ha il vantaggio che il tratto a resistenza differenziale negativa si sposta verso l'asse delle ordinate ed aumenta la parte delle caratteristiche utilizzabili per tensioni anodiche basse. Per questo motivo in un tetrodo a griglia schermo la tensione di questo elettrodo deve essere tenuta due o tre volte minore della tensione anodica.

Si noti infine come la resistenza interna differenziale del tetrodo nei tratti utili delle caratteristiche anodiche sia molto elevata (dell'ordine di $0{,}5 \div 1 M\Omega$), mentre la pendenza è dello stesso ordine di quella dei triodi.

80. – *Tetrodo a fascio elettronico.*

Il *tetrodo a fascio* (fig. 80.1) è un tubo elettronico a vuoto costruito in modo tale da eliminare il tratto di caratteristica anodica a resistenza differenziale negativa del tetrodo a griglia schermo, conservando invece i vantaggi di quest'ultimo.

Nel tetrodo a fascio la griglia controllo e la griglia schermo sono costituite

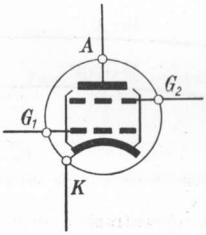


Fig. 80.1 – Tetrodo a fascio elettronico.

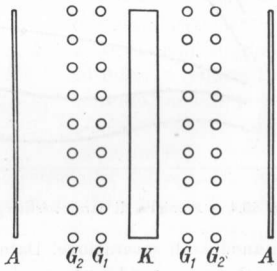


Fig. 80.2 – Disposizione delle griglie nel tetrodo a fascio elettronico.

dallo stesso numero di spire ugualmente disposte in modo che due spire corrispondenti siano complanari (fig. 80.2). Sono pure presenti due *placchette* direttrici collegate al catodo internamente al bulbo (fig. 80.3). La presenza delle due placchette fa sì che il flusso elettronico assuma l'aspetto di due ventagli spaziali opposti con angolo di apertura minore di 90°. Poichè la griglia schermo

si trova all'*ombra* della griglia controllo, su quella cadono pochi elettroni; ossia l'intensità di corrente di griglia schermo è relativamente bassa a vantaggio dell'intensità di corrente anodica. Inoltre fra anodo e griglia schermo, posti a distanza relativamente elevata, si ha una elevata densità elettronica e di conseguenza una elevata carica spaziale negativa a causa della concentrazione in fasci degli elettroni e del potenziale piuttosto elevato della griglia schermo che rallenta gli elettroni che l'hanno superata nella corsa verso l'anodo. Ne deriva che gli elettroni secondari eventualmente emessi dall'anodo vengono respinti nuovamente sull'anodo prima che possano raggiungere la griglia schermo.

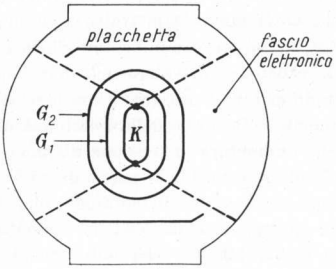


Fig. 80.3 – Disposizione delle placchette direttrici nel tetrodo a fascio elettronico.

Per quanto riguarda la corrente anodica tutto si verifica come se a fornire gli elettroni all'anodo vi fosse un catodo al posto della carica spaziale determinata dal fascio elettronico; anzi, data la pressochè uniforme distribuzione di potenziale su questa carica spaziale, la saturazione si verifica in modo netto: le caratteristiche anodiche presentano quasi uno spigolo vivo in corrispondenza del

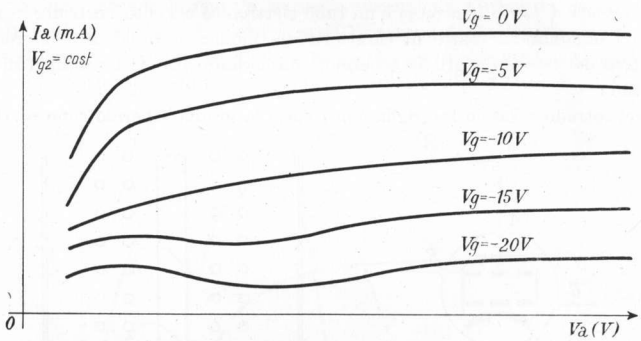


Fig. 80.4 – Famiglia di caratteristiche anodiche del tetrodo a fascio elettronico.

potenziale anodico di saturazione. Data l'elevata concentrazione degli elettroni tra griglia schermo e anodo, necessaria per evitare l'emissione secondaria anodica, il tetrodo a fascio deve funzionare con una elevata intensità di corrente: esso è quindi essenzialmente un tubo di potenza. La tensione della griglia schermo è dello stesso ordine di grandezza e può anche essere più elevata della tensione anodica. La fig. 80.4 presenta una famiglia di caratteristiche anodiche di un tetrodo a fascio. Da essa si vede come il tratto utile delle caratteristiche si estenda per valori molto più bassi della tensione anodica che non in un tetrodo a griglia schermo (fig. 79.6).

81. – *Pentodo*

Il *pentodo* è un tubo elettronico a vuoto derivato dal tetrodo a griglia schermo mediante l'aggiunta tra griglia schermo e anodo di un altro elettrodo detto *griglia di soppressione* che viene ordinariamente collegato al catodo esternamente oppure internamente all'involucro (fig. 81.1). La funzione di questa nuova griglia è analoga a quella della carica spaziale determinata dal fascio elettronico nel tetrodo a fascio: essendo la griglia di soppressione collegata al catodo, stabilisce tra anodo e griglia schermo una zona a potenziale più basso di quella dei due elettrodi, per modo che gli elettroni secondari eventualmente emessi vengono respinti verso il proprio elettrodo emettitore. Il pentodo quindi, oltre a presentare tutti i vantaggi del tetrodo a griglia schermo, possiede delle caratteristiche anodiche (fig. 81.2) nelle quali non compare il tratto a resistenza differenziale negativa. La tensione di griglia schermo può essere dello stesso ordine di grandezza della tensione anodica contribuendo così ad aumentare il potenziale globale, quindi ad aumentare il potenziale di interdizione di griglia controllo (quasi esclusivamente dipendente dalla tensione di griglia schermo) ed infine a rendere l'intensità di corrente anodica pressochè indipendente dalle variazioni di tensione anodica.

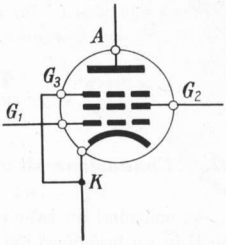


Fig. 81.1 – Pentodo.

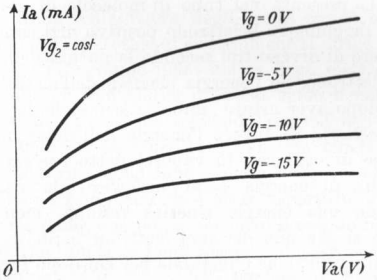


Fig. 81.2 – Famiglia di caratteristiche anodiche del pentodo.

Per quanto riguarda i coefficienti caratteristici del pentodo, il coefficiente di amplificazione μ può giungere a valori dell'ordine di alcune migliaia, la pendenza S può giungere alla decina di mA/V, mentre la resistenza interna differenziale R_a può essere dell'ordine dei $M\Omega$.

CAPITOLO X

TUBI ELETTRONICI A GAS

82. – *Conduzione elettrica nei gas.*

Si consideri un tubo elettronico costituito da due elettrodi (catodo e anodo) posti in un involucro nel quale si trova un gas od un vapore a bassa pressione. Tra gli elettrodi sia applicata una d.d.p. continua la quale acceleri gli eventuali elettroni che si trovino nell'interno del tubo. Muovendosi sotto una d.d.p. V_0 essi acquistano una energia cinetica pari a $m_0u^2/2 = V_0e$ in cui m_0 ed e sono rispettivamente la massa e la carica elettrica di ogni elettrone mentre u è la velocità che esso raggiunge. Data la presenza nel tubo di molecole di gas è probabile che un elettrone prima di raggiungere l'elettrodo positivo urti contro qualche molecola (1). L'urto può essere di diversi tipi secondo la natura del gas e l'energia cinetica posseduta dall'elettrone. Se l'energia cinetica dell'elettrone è sufficientemente bassa l'elettrone dopo aver urtato rimbalza senza che la sua energia subisca diminuzioni (*urto elastico*). Se invece l'energia dell'elettrone è superiore ad un valore caratteristico di ogni gas (o vapore) detto *energia di eccitazione* l'urto avviene con perdita di energia (*urto anelastico*) da parte dell'elettrone che devia conservando una energia cinetica residua, mentre l'energia ceduta all'atomo di gas fa sì che uno dei suoi elettroni periferici si sposti su un'orbita più esterna. Questa situazione è instabile per cui dopo breve tempo (ordine di 10^{-8} sec.) l'elettrone ritorna sulla sua orbita originaria restituendo l'energia (prima ricevuta) sotto forma di energia luminosa, o fotone, di frequenza proporzionale all'entità dell'energia e caratteristica del gas (2). Se

---

(1) La probabilità che un elettrone urti una molecola di gas dipende (in modo inverso) dal *libero cammino medio*, che si definisce come la media aritmetica delle distanze tra gli urti successivi che l'elettrone subirebbe in un ambiente di dimensioni illimitate contenente un determinato gas ad una determinata pressione. Il libero cammino medio l è inversamente proporzionale alla pressione p del gas e direttamente proporzionale alla temperatura assoluta T del gas secondo un coefficiente K che dipende (relativamente poco) dalla natura del gas:

$$l = K\frac{T}{p}.$$

(2) In alcuni casi lo spostamento dell'elettrone periferico su un'orbita più esterna determina uno stato detto *metastabile*. In esso l'atomo permane per un tempo relativamente grande (ordine 0,1 sec.) e il ritorno allo stato normale non avviene mediante

infine l'energia dell'elettrone che urta l'atomo di gas è superiore all'*energia di ionizzazione* (anch'essa caratteristica di ogni gas o vapore), dall'atomo urtato viene asportato un elettrone. L'energia cinetica dell'elettrone incidente risulterà diminuita dell'energia di ionizzazione. La tabella seguente riporta per i vapori e per i gas usati nei tubi elettronici le energie di eccitazione e di ionizzazione misurate in eV. I medesimi valori numerici (in V) indicano rispettivamente il potenziale di eccitazione e il potenziale di ionizzazione.

Gas (o vapore)	Energia di eccitazione (eV)	Energia di ionizzazione (eV)
Mercurio	4,66	10,39
Xenon	8,3	11,58
Argon	11,6	15,7
Neon	16,6	21,5
Elio	19,7	24,5
Sodio	2,10	5,12

Dalla ionizzazione degli atomi hanno origine elettroni negativi che aumentano il flusso totale di elettroni che si dirige verso l'anodo e ioni positivi (di massa molto più grande della massa degli elettroni) che si dirigono verso il catodo. Anche gli ioni che si dirigono verso il catodo vengono accelerati dalla d.d.p. esistente tra anodo e catodo per cui essi finiscono per bombardare il catodo cedendo ad esso nell'urto l'energia cinetica acquistata. Quest'ultima dipende dalla carica dello ione e dalla d.d.p. applicata. Se la ionizzazione è semplice (cioè un solo elettrone è stato asportato dall'atomo) a causa della bassa d.d.p., l'urto dello ione positivo contro il catodo non è eccessivamente dannoso, mentre diviene tale se la ionizzazione è doppia cioè se la d.d.p. supera un valore critico (dell'ordine di $20 \div 25 V$) per cui un elettrone urtando contro un atomo può asportarne due elettroni [1].

Il bombardamento del catodo da parte degli ioni positivi porta pure all'aumento della emissione catodica per l'aumento della temperatura del catodo: aumenta così il *rendimento della emissione.*

Poichè nell'interno di un tubo a gas sono contemporaneamente presenti elettroni negativi e ioni positivi esiste la possibilità di ricombinazione in atomi neutri. Senonchè questa ricombinazione deve avvenire mediante l'emissione della energia di ionizzazione. In genere questo avviene agli elettrodi o alle

---

emissione di un fotone ma mediante cessione di energia termica alle pareti, agli elettrodi o ad altri atomi del gas. Può anche accadere che un atomo allo stato metastabile urtato da un altro elettrone venga ionizzato.

[1] È per questo motivo che nei tubi a gas non è possibile l'impiego dei delicati catodi ad ossido quando la tensione di funzionamento supera il valore sopra indicato. Sono in tal caso necessari i catodi di tungsteno di minore efficienza ma più robusti.

pareti del recipiente che ricevono sotto forma termica l'energia di ionizzazione [1].

La presenza di gas nei tubi elettronici porta a un aumento della intensità di corrente a causa delle cariche liberate dalla ionizzazione. Prende il nome di *plasma* una regione del tubo in cui si trovano, oltre le molecole del gas, ioni positivi ed elettroni presso a poco in eguale concentrazione. Il plasma si comporta quindi come un buon conduttore. In condizione di equilibrio deve essere costante il numero delle ionizzazioni prodotte nell'unità di tempo ed il numero delle ricombinazioni. Se il tubo è soggetto ad una d.d.p. continua le ricombinazioni avvengono di preferenza nelle vicinanze degli elettrodi; se invece il tubo è soggetto a tensione alternata le ricombinazioni avvengono di preferenza nelle vicinanze delle pareti.

83. – *Diodo a gas a catodo caldo (fanatron).*

I diodi a gas a catodo caldo (o *fanotron*) sono tubi elettronici a gas con due soli elettrodi (anodo e catodo) di cui l'emettitore (catodo) viene riscaldato come nei tubi a vuoto. Il gas di riempimento può essere un gas inerte come l'argon,

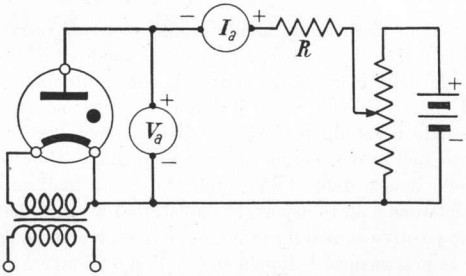


Fig. 83.1 – Circuito per il rilievo della caratteristica anodica di un diodo a gas a catodo caldo.

lo xenon, l'elio oppure vapore di mercurio. I diodi a gas assolvono essenzialmente alla funzione di raddrizzatori.

In fig. 83.1 è indicato il circuito per il rilievo della caratteristica anodica di un diodo a gas a catodo caldo. La resistenza R funziona come limitatrice di corrente. Per piccoli valori della tensione anodica l'intensità di corrente anodica è piuttosto bassa [2] perchè fornita esclusivamente dalla emissione catodica e

---

[1] Per questo motivo nei tubi a gas occorre tener presente il cosiddetto tempo di deionizzazione che è il tempo necessario, dopo l'annullamento della d.d.p. applicata, affinchè avvenga la ricombinazione totale sotto forma di atomi neutri degli elettroni e degli ioni dissociati. Questo tempo di deionizzazione può essere compreso tra 1 μ sec ed 1m sec; esso limita le possibilità di impiego dei tubi stessi specialmente nel campo delle alte frequenze.

[2] Anche più bassa che nei diodi a vuoto in quanto il riscaldamento dei diodi a gas

limitata dalla carica spaziale negativa come nei diodi a vuoto (fig. 83.2). Quando, aumentando la tensione anodica, viene raggiunto il potenziale di ionizzazione del gas contenuto nel diodo, gli elettroni primari emessi dal catodo ed accelerati dal potenziale anodico urtano gli atomi di gas ionizzandoli e determinando in tal modo un forte aumento di intensità di corrente anodica, sia perchè gli ioni positivi che si dirigono verso il catodo a velocità piuttosto lenta non solo annullano la carica spaziale negativa ma creano una carica spaziale positiva che contribuisce ad accelerare gli elettroni, sia perchè aumentando la velocità degli elettroni aumenta a causa degli urti contro gli atomi di gas il numero degli elettroni che si dirigono verso l'anodo, sia perchè il bombardamento catodico favorisce l'aumento della emissione. Il processo è autoesaltante per cui l'intensità di corrente risulta limitata unicamente dagli elementi del circuito esterno del diodo (come la resistenza limitatrice R di fig. 83.1). In fig. 83.3 sono rappresentate le distribuzioni di potenziale nell'interno del diodo a gas passando da tensione anodica inferiore (1) a tensione anodica superiore al potenziale di ionizzazione (2). Si nota che in quest'ultimo caso tutta (o quasi) la caduta di tensione nell'interno del diodo si ha in uno spazio piccolissimo (h) vicino al catodo. È lo spazio in cui gli elettroni emessi dal catodo non hanno ancora l'energia sufficiente per ionizzare il gas: questo spazio è tanto più ridotto quanto maggiore (3) è l'intensità di corrente nel tubo [1]. Il potenziale si mantiene poi costante nel tubo fino all'anodo. Lo spazio p, pres-

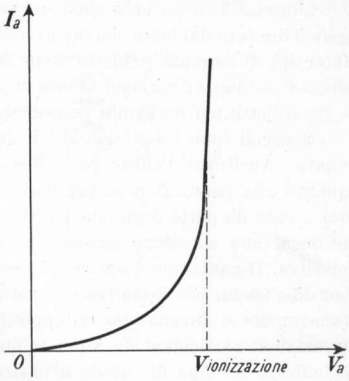


Fig. 83.2 – Caratteristica del diodo a gas a catodo caldo.

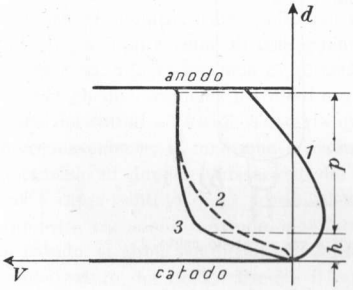


Fig. 83.3 – Distribuzione dei potenziali nell'interno del diodo a gas a catodo caldo.

è piuttosto limitato, venendo poi integrato (a tensione di normale funzionamento) dal bombardamento degli ioni positivi sul catodo.

[1] Questo spiega perchè ad un aumento di intensità di corrente (fig. 83.2) oltre la tensione di ionizzazione non corrisponda un aumento della caduta di tensione nel tubo. In questo la parte che rappresenta l'ostacolo alla circolazione di corrente è proprio data dal tratto h. Se aumenta l'intensità di corrente, h diminuisce e la caduta di tensione rimane costante.

sochè privo di caduta di tensione, è occupato dal plasma che si comporta come un buon conduttore. Per la sua presenza è come se l'anodo agisse nelle vicinanze del catodo: si dice *anodo virtuale* la zona distante h dal catodo, esso si adatta spontaneamente allo sviluppo geometrico della superficie catodica.

L'intensità di corrente anodica che i diodi a gas a catodo caldo possono erogare è limitata dal fatto che superato il valore dell'emissione catodica la maggiore intensità di corrente richiesta viene fornita da un aumento di ionizzazione che divenendo doppia per ogni atomo di gas porta alla distruzione del catodo come è stato detto nel paragrafo precedente.

Notevoli sono i vantaggi che il diodo a gas a catodo caldo ha sul diodo a vuoto. Anzitutto l'efficienza dell'emissione catodica risulta più elevata in quanto alla potenza spesa per il riscaldamento si aggiunge il bombardamento del catodo da parte degli ioni positivi e quindi, oltre ad un aumento di potenza termica, una emissione secondaria che incrementa l'emissione catodica complessiva. Il vantaggio è ancora più notevole di quanto appaia da queste ultime considerazioni, per il motivo che nei diodi a gas, poichè l'anodo virtuale spontaneamente si adegua allo sviluppo del catodo, si può dare a questo una conformazione particolare che renda minima la dissipazione di calore. In fig. 83.4, *a*) è indicato un tipo di catodo a nastro di tungsteno per riscaldamento diretto avvolto a zig-zag. Per non avere notevoli differenze tra le cadute di tensione

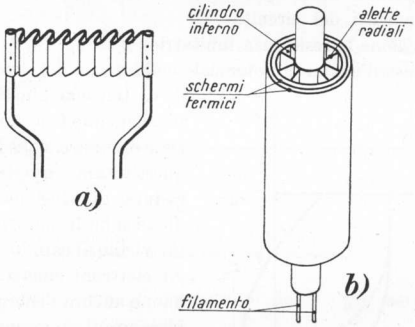


Fig. 83.4 – Catodi per diodi a gas a catodo caldo.

fra anodo e le due estremità del catodo, la tensione di accensione deve risultare piuttosto bassa (2,5 V; 5V; 6,3 V). Questa tensione può essere invece più elevata (anche sul centinaio di volt) per i catodi a riscaldamento indiretto di cui un tipo è indicato in fig. 83.4, *b*). Esso è costituito da un cilindro di nikel che porta delle alette radiali le quali determinano delle scanalature e sulle quali trova posto il rivestimento di ossidi. I cilindri più esterni hanno lo scopo di ridurre l'irradiazione del calore.

Il motivo che rende poi senza confronti il diodo a gas a catodo caldo preferibile al diodo a vuoto nei circuiti raddrizzatori di notevole potenza è la sua

bassa caduta di tensione interna che dà come conseguenza una bassa dissipazione anodica. Ora poichè il rendimento del raddrizzamento, a parità di corrente richiesta dal carico, aumenta con il diminuire della tensione anodica, questo rendimento è ovviamente molto grande quando si usano diodi a gas a catodo caldo. La fig. 83.5 indica come per una stessa corrente anodica I_a

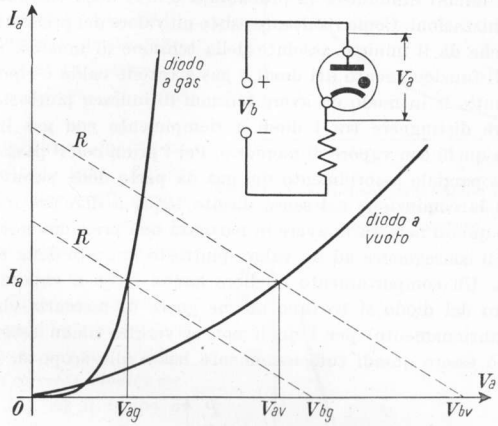


Fig. 83.5 – Confronto tra il diodo a gas a catodo caldo ed il diodo a vuoto.

la tensione anodica risulti molto più piccola nel caso venga usato un diodo a gas ($V_{ag} < V_{av}$) e come di conseguenza a parità di resistenza di carico possa essere diminuita la tensione di alimentazione ($V_{bg} < V_{bv}$).

Tra gli inconvenienti dei diodi a gas vi è quello della possibilità di distruzione dei catodi ad ossidi. Tuttavia questa possibilità è evitata se, come visto precedentemente, si mantiene la caduta di potenziale nel tubo al disotto del potenziale di doppia ionizzazione del gas. Un altro inconveniente dei diodi a gas è rappresentato dalla possibilità che invertendo le polarità della tensione applicata tra anodo e catodo, cioè facendo diventare l'anodo negativo rispetto al catodo, si abbia conduzione in senso inverso venendo così a cessare l'effetto raddrizzatore del diodo. Prende il nome di *massima tensione inversa* il più grande valore di tensione anodica (con il negativo dalla parte dell'anodo) che si possa applicare al tubo senza che in esso avvenga la scarica in senso inverso a quello di normale conduzione. La *tensione di innesco* V_i, alla quale appunto avviene la scarica, dipende ovviamente dalle caratteristiche fisiche e geometriche degli elettrodi ed inoltre dalla distanza tra gli elettrodi e dalla pressione del gas esistente nel diodo. Per ogni valore di pressione esiste un valore della distanza fra gli elettrodi che rende minima la tensione di innesco. Per distanze maggiori l'intensità del campo elettrico risulta insufficiente a fornire agli elettroni fra un urto e l'altro l'energia necessaria per ionizzare le molecole di gas,

mentre per distanze minori diminuisce il numero degli urti di ciascun elettrone. Allo stesso modo per ogni valore della distanza tra gli elettrodi vi è un valore della pressione del gas che rende minima la tensione di innesco V_i. Per pressioni maggiori diminuisce il libero cammino medio degli elettroni e quindi l'energia cinetica acquistata da essi tra un urto e il successivo, mentre per pressioni minori diminuisce la probabilità d'urto degli elettroni e quindi il numero di ionizzazioni. Come risultante esiste un valore del prodotto pressione × distanza [1] che dà il minimo assoluto della tensione di innesco. Ciò è visibile in fig. 83.6. Il funzionamento dei diodi a gas a catodo caldo è riportato alla sinistra del punto M in modo da avere tensioni di innesco piuttosto elevate. In effetti occorre distinguere tra i diodi a riempimento con gas inerte (argon, xenon, elio) e quelli con vapore di mercurio. Per i primi con il passare del tempo si verifica un parziale assorbimento del gas da parte delle pareti e degli elettrodi per cui la conduzione nel senso diretto tende a divenire irregolare. Con questi tubi è quindi necessario avere in partenza una pressione non molto bassa il che porta di conseguenza ad un valore piuttosto limitato della tensione massima inversa. Un comportamento migliore hanno i tipi a vapore di mercurio (nell'involucro del diodo si trovano alcune gocce di mercurio che evaporano durante il funzionamento) per i quali non si verifica alcun assorbimento; la pressione può essere quindi sufficientemente bassa allo scopo di ottenere una

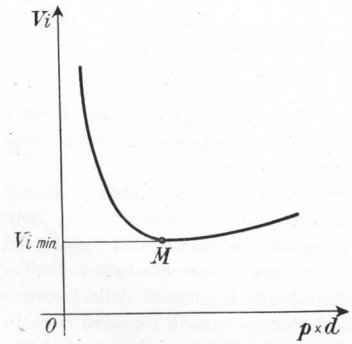


Fig. 83.6 – Variazione della tensione di innesco di un tubo a gas in funzione del prodotto pressione × distanza elettrodi.

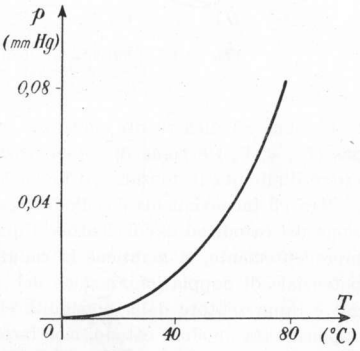


Fig. 83.7 – Variazione della pressione in funzione della temperatura in un tubo a vapore di mercurio.

elevata tensione inversa. D'altra parte i tubi a gas presentano il vantaggio che la loro pressione è quasi insensibile alle variazioni di temperatura, mentre per i tubi a vapore di mercurio la pressione dipende sensibilmente dalla temperatura (fig. 83.7) dalla quale di conseguenza dipende sia la caduta di tensione

[1] La tensione di innesco è costante per un dato prodotto pressione × distanza elettrodi, indipendentemente dal rapporto tra i due fattori (legge di *Paschen*).

durante la conduzione diretta (fig. 83.8) sia la tensione massima inversa (fig. 83.9): la temperatura dei tubi a vapore di mercurio richiede quindi di essere controllata [1].

Vi è anche una particolare categoria di diodi a gas a catodo caldo il cui funzionamento è riportato a destra del punto M (fig. 83.6). Sono i tubi *tungar* (tungsteno-argon) con catodo di tungsteno toriato e argon come gas di riempimento.

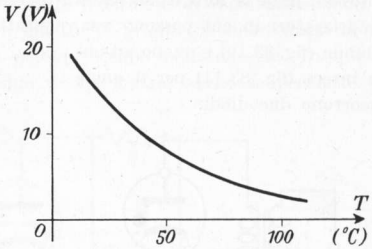


Fig. 83.8 – Variazione della caduta interna di tensione in funzione della temperatura in un tubo a vapore di mercurio.

Tra i dati di funzionamento dei tubi a gas a catodo caldo, forniti dal costruttore, oltre quelli comuni ai tubi a vuoto e di evidente interpretazione (come la massima tensione anodica e la massima tensione anodica inversa), ve ne sono alcuni da prendere in attenta considerazione: la *corrente anodica massima* I_M, la *corrente anodica media massima* I_{mM} ed il *tempo di integrazione massimo* t_{iM}. La corrente anodica massima non deve mai essere superata (è prevista però una corrente maggiore tollerabile durante un transitorio di brevissima durata); il prodotto $I_{mM} \times \times t_{iM}$ fornisce un valore limite che non deve essere superato dal prodotto della corrente di lavoro I_l per il tempo durante il quale il tubo a gas è interessato, t.

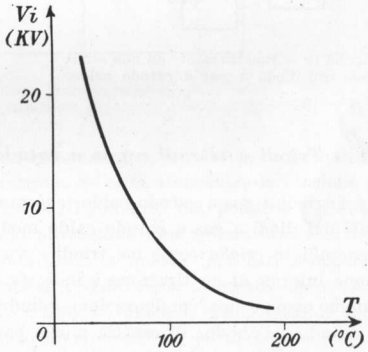


Fig. 83.9 – Variazione della massima tensione inversa in funzione della temperatura in un tubo a vapore di mercurio.

Deve in ogni caso essere rispettata la condizione:

83.1 $$I_l \times t \leq I_{mM} \times t_{iM} ,$$

nella quale però deve essere sempre $I_l < I_M$. Se viene assunta come intensità di corrente di lavoro una intensità maggiore di I_{mM}, risulta $t < t_{iM}$; l'intervallo $t_{iM} - t$ deve essere per il tubo a gas un intervallo di riposo.

---

[1] È in particolare necessario provvedere a lasciar trascorrere un opportuno intervallo di tempo tra l'accensione del catodo e l'applicazione della tensione anodica, onde evitare che la richiesta di corrente da parte del circuito esterno sia superiore a quella che il tubo, non avendo ancora raggiunto la temperatura di regime, è in grado di fornire; ciò danneggerebbe il catodo.

L'impiego normale dei diodi a gas a catodo caldo è quello di raddrizzatori. Essi risultano particolarmente convenienti quando le potenze in gioco sono notevoli, data la loro bassa caduta di tensione interna. I più semplici circuiti raddrizzatori in cui possono venire usati questi tubi sono quello ad una semionda (fig. 83.10) e quello ad onda intera (fig. 83.11) per il quale occorrono due diodi.

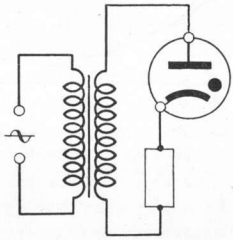


Fig. 83.10 – Raddrizzatore ad una semionda con diodo a gas a catodo caldo.

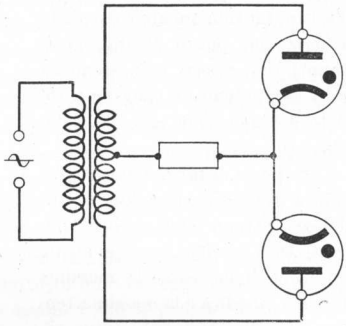


Fig. 83.11 – Raddrizzatore ad onda intera con diodi a gas a catodo caldo.

84. - *Triodi e tetrodi a gas a catodo caldo (tiratroni).*

I triodi a gas a catodo caldo (che prendono il nome di *tiratroni*) sono derivati dai diodi a gas a catodo caldo mediante l'aggiunta di un terzo elettrodo denominato *griglia* come nei triodi a vuoto. La costituzione interna di un tiratrone è indicata in fig. 84.1. La griglia assume una configurazione cilindrica che avvolge il catodo e l'anodo; di essa fa anche parte un disco forato posto tra catodo ed anodo e che scherma elettrostaticamente tra loro questi due elettrodi.

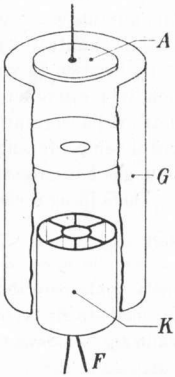


Fig. 84.1 – Costituzione interna di un tiratrone.

Gli elettroni emessi dal catodo risentono dell'azione del potenziale globale che, come nel caso dei triodi a vuoto, è una combinazione della tensione anodica e della tensione di griglia. La differenza fondamentale tra i triodi a vuoto ed i tiratroni consiste nel fatto che mentre nei triodi a vuoto l'intensità di corrente anodica dipende sempre dal potenziale globale e ad esempio diminuendo (o rendendo più negativa) la tensione di griglia la corrente anodica diminuisce di intensità, nei tiratroni la dipendenza della intensità di corrente anodica dal potenziale globale si verifica solo all'atto dell'innesco del tubo mentre a tubo innescato la griglia perde ogni capacità di controllo; affinchè questa sia ripristinata occorre che diminuisca la tensione anodica fino al disinnesco.

Dato l'interesse che per i tiratroni assume il fenomeno dell'innesco conviene soffermarsi ad esaminarlo un po' dettagliatamente. Si consideri ad esempio il circuito di fig. 84.2. Si applichi mediante il circuito di regolazione anodico una tensione V_a tra anodo e catodo, mentre la griglia sia mantenuta ad un potenziale sufficientemente negativo perchè il tubo non inneschi. In queste condizioni il potenziale globale essendo troppo basso, anche se permette un

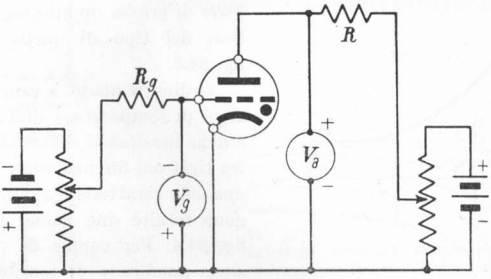


Fig. 84.2 - Circuito per il rilievo della caratteristica d'innesco di un tiratrone.

debolissimo passaggio di corrente nel circuito anodico, non consente la ionizzazione del gas o vapore presente nel tiratrone. Se si fa aumentare la tensione di griglia (facendola divenire meno negativa), l'aumento del potenziale globale fa sì che gli elettroni emessi dal catodo provochino una ionizzazione. Gli ioni positivi attirati dalla griglia formano attorno a questa una carica spaziale positiva mentre si produce una corrente di griglia. Se si fa ancora aumentare la tensione di griglia (facendola tendere a zero) si riduce la carica spaziale positiva che circonda la griglia e l'aumento di ionizzazione porta all'innesco tra anodo e griglia che successivamente si trasferisce tra anodo e catodo. Si stabilisce così una forte conduzione e l'intensità di corrente anodica (come nei diodi a gas a catodo caldo) è unicamente limitata dalla resistenza R presente nel circuito anodico [1]. Nell'interno del tiratrone vi è ora il plasma che avvicina virtualmente l'anodo al catodo. La griglia viene a trovarsi immersa nel plasma; nel suo intorno si raccoglie una carica di ioni positivi che agisce da schermo: è questo il motivo per cui la griglia perde ogni azione di controllo. Come detto precedentemente per disinnescare il tiratrone è necessario diminuire la tensione anodica.

Oltre l'intensità di corrente anodica si stabilisce una intensità di corrente di griglia e solo su di questa influisce qualsiasi variazione di tensione di griglia. L'azione schermante viene invece effettuata dagli elettroni negativi se la tensione di griglia è fatta diventare positiva.

---

[1] L'innesco del tiratrone è visibile per la luminosità della scarica ed è indicato dal voltmetro anodico per il subitaneo abbassarsi della tensione da esso indicata.

Se per ogni valore della tensione anodica (necessariamente superiore al potenziale di ionizzazione) si rileva il valore della tensione di griglia che determina l'innesco (tensione critica o d'innesco), e le rispettive coppie di valori si riportano su un diagramma (V_a, V_g) si ottiene la cosiddetta *caratteristica d'innesco* (detta anche *caratteristica del controllo di griglia* oppure *caratteristica critica*) del tipo di quella riportata in fig. 84.3.

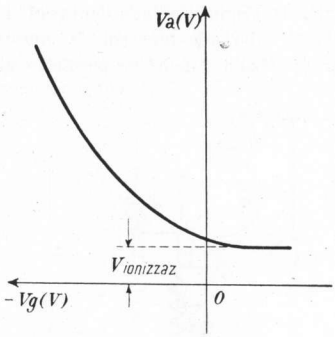


Fig. 84.3 – Caratteristica d'innesco del tiratrone a controllo negativo.

Ordinariamente, a causa delle variazioni di temperatura di funzionamento e delle inevitabili differenze costruttive fra tiratroni del medesimo tipo, anzichè una sola caratteristica d'innesco ne vengono fornite due come è indicato in fig. 84.4. Per coppie di valori di tensione anodica e di tensione di griglia corrispondenti a punti situati superiormente alla caratteristica 1 l'innesco è sicuro; per punti situati inferiormente alla caratteristica 2 l'innesco non è possibile; infine per punti compresi tra le due caratteristiche l'innesco è incerto.

Le caratteristiche d'innesco finora esaminate si riferiscono a tiratroni cosiddetti a *controllo negativo*. Vi sono pure tiratroni a controllo positivo: sono quelli per i quali l'innesco avviene per valori positivi della tensione di griglia. La fig. 84.5 riporta una caratteristica d'innesco di un tiratrone a *controllo*

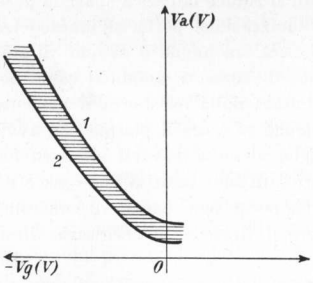


Fig. 84.4 – Campo di variazione della caratteristica d'innesco di un tiratrone.

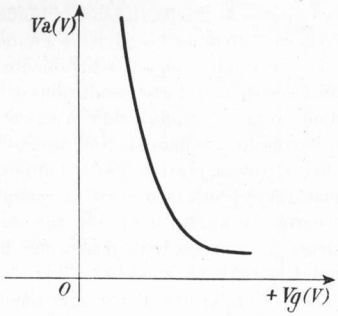


Fig. 84.5 – Caratteristica d'innesco di un tiratrone a controllo positivo.

positivo, mentre la fig. 84.6 indica la costituzione interna di questo tubo: essendo la griglia formata da diversi elettrodi forati, gli elettroni più difficilmente riescono a raggiungere lo spazio griglia-anodo in cui poter produrre la neces-

saria ionizzazione del gas. Ciò si verifica solo con elevato potenziale globale che acceleri gli elettroni a sufficienza e quindi con tensione di griglia positiva.

I tiratroni a controllo di griglia positivo hanno nei confronti di quelli a controllo negativo lo svantaggio di una bassa resistenza nel circuito di griglia e quindi di un maggior assorbimento di potenza di comando; in compenso l'innesco è quasi indipendente dalla tensione anodica.

Una grandezza cui occorre rivolgere attenzione particolare nei circuiti impieganti tiratroni è l'intensità di corrente di griglia. Essa varia da valori dell'ordine dei μA a tubo non innescato fino a valori dell'ordine di parecchi mA a tubo innescato. L'intensità di corrente di griglia dipende, oltre che dalla tensione di griglia, dalla resistenza inserita nel circuito di griglia e dalla tensione o intensità di corrente anodica. Il suo valore può essere determinato mediante l'impiego delle caratteristiche che danno l'intensità di corrente di griglia in funzione della tensione di griglia sia prima dell'innesco, sia dopo l'innesco. In fig. 84.7 sono indicate le caratteristiche di griglia di un tiratrone prima dell'innesco, mentre in fig. 84.8 sono indicate le caratteristiche di griglia del medesimo tiratrone dopo l'innesco.

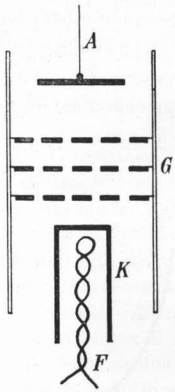


Fig. 84.6 – Costituzione interna di un tiratrone a controllo positivo.

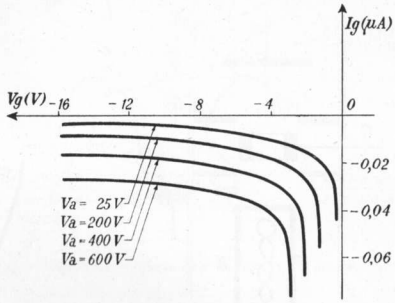


Fig. 84.7 – Caratteristiche di griglia di un tiratrone non innescato.

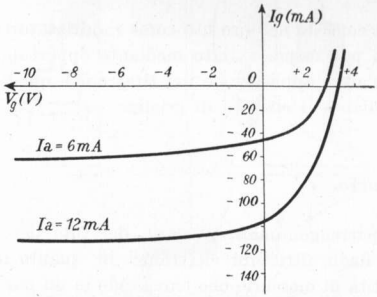


Fig. 84.8 – Caratteristiche di griglia di un tiratrone innescato.

Occorre osservare che un valore molto elevato della resistenza di griglia determina incertezza nell'innesco, mentre un valore basso comporta una forte corrente di griglia cui deve provvedere il catodo e richiede potenza rilevante da parte del generatore presente nel circuito di griglia. Tra gli altri dati

caratteristici di un tiratrone vengono dati, in vista degli inconvenienti che una eccessiva intensità di corrente di griglia può provocare, il massimo valore di punta della corrente positiva di griglia per anodo positivo ed il massimo valore di punta della corrente positiva di griglia per anodo negativo.

La corrente di griglia può essere ridotta se si aggiunge una griglia schermo tra la griglia di comando e il catodo e tra la griglia di comando e l'anodo. In fig. 84.9 è schematizzata la costituzione interna di un tiratrone a griglia schermo.

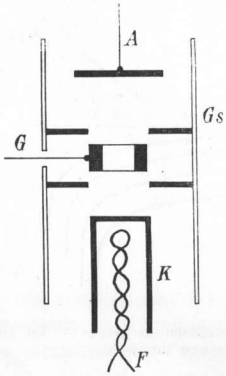


Fig. 84.9 – Costituzione interna di un tiratrone a griglia schermo.

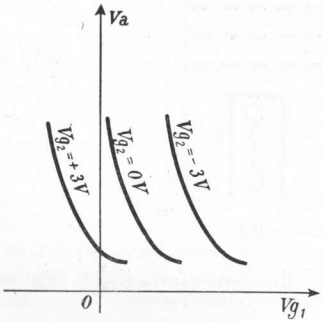


Fig. 84.10 – Famiglia di caratteristiche di innesco di un tiratrone a griglia schermo.

Oltre il vantaggio della minore intensità di corrente di griglia controllo, si riducono notevolmente le capacità interelettrodiche ed infine si ha la possibilità di variare la caratteristica di innesco con la semplice regolazione della tensione cui viene portata la griglia schermo, come si rileva dalla famiglia di caratteristiche di innesco di fig. 84.10, tracciate per diversi valori della tensione di griglia schermo.

Una delle applicazioni dei tiratroni consiste nel loro uso come raddrizzatori: il valore medio della corrente erogata può essere variato mediante opportuno controllo della tensione di griglia. Un'altra applicazione dei tiratroni è quella di interruttori sempre controllati mediante il circuito di griglia.

85. - *Mutatori a vapore di mercurio.*

I *mutatori a vapore di mercurio* appartengono alla categoria dei tubi detti a *catodo di mercurio*, che differiscono dagli altri tubi elettronici in quanto il catodo è costituito da una certa quantità di mercurio che trova sede in un pozzetto ricavato nella parte inferiore del tubo.

I mutatori sono dispositivi adatti al raddrizzamento di forti intensità di

corrente. L'involucro, nel quale è stato praticato il vuoto, può essere costituito da una ampolla di vetro (fig. 85.1) nei tipi di minor potenza o da una cassa di ferro (fig. 85.2) nei tipi di maggior potenza. Nella parte superiore si ha la cosiddetta *camera di condensazione* nella quale avviene la condensazione del mercurio che così ricade nel pozzetto. Il raffreddamento può essere ad aria o a circolazione d'acqua. Completano il tubo diversi elettrodi: l'anodo o più spesso gli anodi, detti anche *anodi principali*; *l'elettrodo di accensione* e gli *elettrodi di eccitazione* o *anodi ausiliari*. Gli anodi principali adempiono la funzione di elettrodi raccoglitori: essi sono ordinariamente più d'uno [1] rendendo possibile il raddrizzamento monofase ad onda intera e quello polifase. L'elettrodo di accensione serve per avviare il processo di scarica. Nei tubi di vetro, come quello indicato in fig. 85.1, l'innesco si fa avvenire inclinando il tubo in modo che si stabilisca il contatto tra il mercurio costituente il catodo e quello che circonda l'elettrodo di accensione: per mezzo di un circuito esterno si determina un passaggio di corrente. L'interruzione di questa corrente, ottenuta riportando il tubo nella posizione di normale funzionamento, fa comparire un arco tra l'elettrodo di accensione ed il catodo di mercurio; appena nel tubo si è formato abbastanza vapore l'arco si trasferisce dall'elettrodo di accensione all'anodo o agli anodi. Per i tubi a cassa metallica vengono usati diversi sistemi per l'innesco dell'arco; vi può essere, ad esempio, nella parte superiore del recipiente un solenoide che eccitato da una opportuna in-

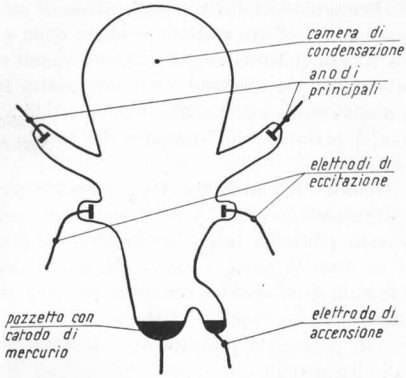


Fig. 85.1 – Mutatore a vapore di mercurio.

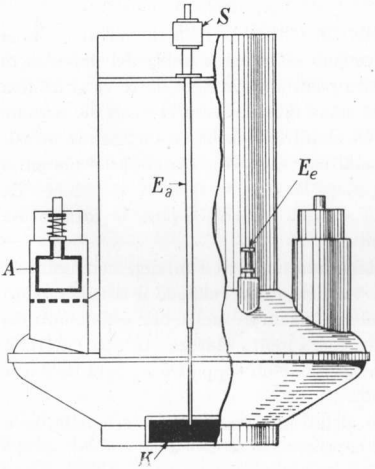


Fig. 85.2 – Mutatore in cassa metallica.

[1] Gli anodi possono essere anche molto numerosi, fino a 36.

tensità di corrente fa scendere un elettrodo d'innesco nel catodo di mercurio. Diseccitando il solenoide interviene l'azione di una molla che richiama l'elettrodo: dalla interruzione della corrente di accensione prende origine l'arco.

Dopo l'innesco dell'arco, sul catodo di mercurio si formano una o più macchie luminose dette *macchie catodiche* dalle quali avviene l'emissione elettronica [1]. Gli elettroni emessi vengono quindi accelerati dal campo elettrico presente tra anodo e catodo e urtando contro le molecole di vapore di mercurio ne producono la ionizzazione come nei tubi a gas. Gli ioni positivi che ne derivano si portano nelle vicinanze del catodo a neutralizzare la carica spaziale negativa.

L'emissione catodica avviene in parte per emissione secondaria dovuta al bombardamento di ioni positivi, in minima parte per emissione termoelettronica (essendo piuttosto bassa la temperatura delle macchie catodiche) ed invece per la maggior parte a causa dell'azione dell'intenso campo elettrico che in prossimità delle macchie catodiche viene determinato dagli ioni positivi: questo campo elettrico strappa gli elettroni dal catodo facendo loro superare la barriera di potenziale presente alla superficie del mercurio come alla superficie degli altri metalli.

Affinchè il tubo a catodo di mercurio non cessi di funzionare è necessario che in esso permanga il regime di conduzione; se questo viene a mancare per l'annullarsi del carico diviene necessaria una nuova operazione di innesco per avviarne il funzionamento. Per ovviare questi inconvenienti sono presenti nel tubo gli elettrodi di eccitazione che hanno il compito di mantenere permanentemente innescato l'arco onde evitare che esso scompaia durante il funzionamento del tubo.

Un problema che si impone è quello di evitare la formazione di un arco inverso tra anodo e catodo. Questo arco può stabilirsi a causa del deposito di mercurio sull'anodo; per annullare questa possibilità ai tubi di vetro si dà una configurazione tale per cui gli anodi non siano direttamente in vista del catodo, nei tubi ad involucro metallico invece gli anodi sono protetti da lamine metalliche. Inoltre il raffreddamento degli anodi contribuisce a far sì che il mercurio che eventualmente vi arrivi non raggiunga la temperatura di emissione. La mancanza di visuale diretta tra catodo e anodi impedisce pure la formazione dell'arco inverso a causa degli ioni positivi.

I mutatori a catodo di mercurio presentano notevoli vantaggi nei confronti dei tubi a gas a catodo caldo. Il loro avviamento non richiede il riscaldamento del catodo e si ha così un guadagno nel rendimento e nella più veloce entrata in funzione. L'intensità di corrente può essere molto elevata; infatti l'attività della macchia catodica può essere grande in modo da sopperire ad ogni richiesta del carico senza compromettere il catodo.

D'altra parte questi tubi presentano alcuni inconvenienti come quello della

---

[1] Nei mutatori a cassa metallica è necessario che questa sia opportunamente isolata dal pozzetto contenente mercurio per evitare che la macchia catodica trasferendosi sulla cassa ne provochi la perforazione.

necessità che in essi l'arco deve essere mantenuto innescato con circuiti ausiliari. Inoltre nei mutatori a cassa metallica è quasi sempre necessaria l'apparecchiatura (costituita da pompe e dispositivi di controllo) per mantenere il grado di vuoto necessario e ciò naturalmente riduce il rendimento complessivo dell'impianto.

86. - *Ignitroni.*

Gli *ignitroni* appartengono alla categoria dei tubi a catodo di mercurio come i mutatori esaminati nel paragrafo precedente. Ne differiscono in quanto gli ignitroni sono sempre monoanodici e soprattutto perchè in essi non esistono elettrodi di eccitazione che servano a mantenere costantemente innescato l'anodo, ma solo un elettrodo particolare di innesco, detto *ignitore*, che ogni volta che il tubo deve essere innescato interviene con azione sufficientemente rapida ($10 \div 100 \mu$ sec).

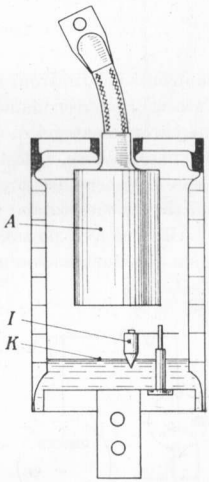


Fig. 86.1 – Costituzione interna di un ignitrone.

In fig. 86.1 è rappresentata la costituzione interna di un ignitrone; oltre il catodo di mercurio e l'anodo vi si nota appunto l'ignitore. Quest'ultimo è formato da materiale semiconduttore (carburo di boro) di forma all'incirca troncoconica con la punta immersa nel mercurio (fig. 86.2). Nell'istante in cui si deve formare la macchia catodica, mediante un circuito di accensione viene applicata una d.d.p. tra ignitore e catodo ($100 \div 250$ V): questa determina il passaggio nell'ignitore di una forte intensità di corrente (decine di ampere) che tende a concentrarsi lungo il menisco di contatto tra mercurio e ignitore. L'elevata densità di corrente che ne deriva è causa di un intensissimo gradiente di potenziale che produce l'emissione di elettroni dal catodo di mercurio [1]. I primi di questi elettroni vengono attirati dalla parte superiore dell'ignitore che li accelera. Dopo la successiva ionizzazione del vapore di mercurio la conduzione si trasferisce tra catodo ed anodo se questo è positivo; a tubo innescato si provvede quindi ad aprire il circuito dell'ignitore. Sulla superficie catodica è presente la solita macchia catodica (o le macchie se l'intensità richiesta è molto elevata) la quale però rimane ancorata all'ignitore, per modo che in questi tubi

[1] Se nell'interno del tubo varia la temperatura varia pure il livello del mercurio liquido. La forma conica dell'ignitore serve appunto a compensare queste variazioni di livello. Infatti ad un abbassamento del livello del mercurio corrisponde una maggior caduta di tensione nell'ignitore e quindi una minore intensità di corrente, ma anche una minore superficie di contatto con il mercurio per cui la densità di corrente rimane pressochè invariata garantendo in ogni caso l'innesco.

anche se l'involucro è metallico non è necessario l'isolamento tra il pozzetto catodico e l'involucro stesso. La conduzione cessa allorchè la tensione anodica si annulla: la macchia catodica scompare e, data l'assenza di elettrodi di eccitazione, scompare pure la ionizzazione nell'interno del tubo per cui risulta molto limitato il pericolo d'innesco dell'arco inverso (presente invece nei mutatori a vapore di mercurio). Ciò permette di ridurre la distanza tra anodo e catodo con conseguente notevole riduzione della caduta interna di tensione e aumento di rendimento.

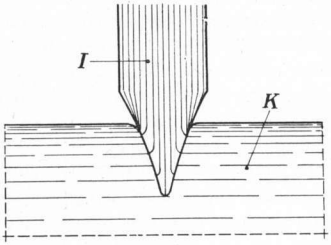


Fig. 86.2 – Ignitore.

Gli ignitroni possono essere usati nei circuiti raddrizzatori, presentando nei confronti dei tiratroni il vantaggio di una più rapida entrata in funzione data l'assenza del riscaldamento del catodo e nei confronti dei mutatori a vapore di mercurio i vantaggi di una più bassa caduta di tensione e di un minore pericolo dell'arco inverso. Quest'ultimo vantaggio diventa rilevante alle grandi potenze quando l'onere del circuito d'accensione dell'ignitore non incide sensibilmente sul rendimento totale.

Gli ignitroni possono anche essere usati come interruttori al posto dei tiratroni sostituendo vantaggiosamente questi ultimi allorchè le correnti richieste

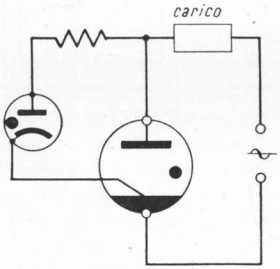


Fig. 86.3 – Circuito di impiego di un ignitrone e relativo circuito di accensione dell'ignitore.

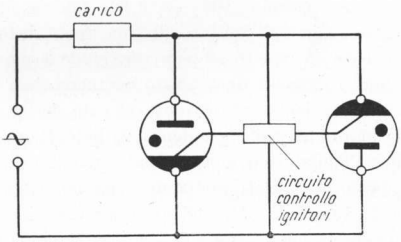


Fig. 86.4 – Ignitroni in coppia antiparallela.

sono di elevata intensità, infatti la macchia catodica non subisce le limitazioni cui devono invece soggiacere i catodi dei tiratroni.

La fig. 86.3 rappresenta un semplice circuito in cui viene usato un ignitrone con relativo circuito di accensione dell'ignitore, costituito da un diodo a gas e da una resistenza limitatrice. Il diodo si innesca allorchè la tensione tra anodo e catodo nel semiperiodo positivo supera un determinato valore caratteristico

del diodo. L'innesco del diodo permette il passaggio di corrente attraverso l'ignitore e quindi l'innesco dell'ignitrone con conseguente diminuzione della tensione ai capi del diodo il cui circuito si interrompe. Allorchè la tensione di alimentazione si inverte il circuito dell'ignitrone si interrompe anch'esso ed il ciclo si ripete con il successivo periodo della tensione alternata di alimentazione.

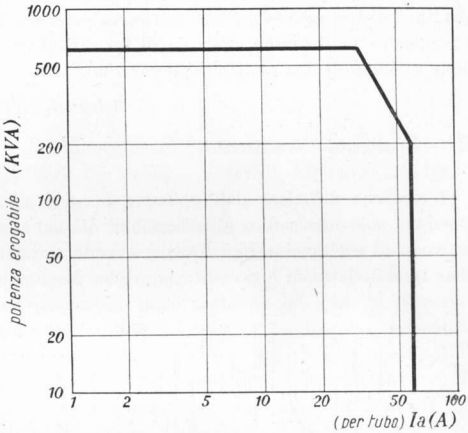


Fig. 86.5 – Curva caratteristica dell'ignitrone: corrente media in funzione della potenza fornita al carico (collegamento parallelo inverso).

In fig. 86.4 è schematizzata la disposizione frequentemente usata di due ignitroni collegati in *coppia antiparallela*; la disposizione prende anche il nome di *parallelo inverso*. Essa è caratterizzata dal funzionamento alterno di ciascun ignitrone nei due semiperiodi della tensione alternata. A quest'ultimo tipo di collegamento si riferiscono le curve caratteristiche (in iscale logaritmiche) di fig. 86.5 e di fig. 86.6. La prima

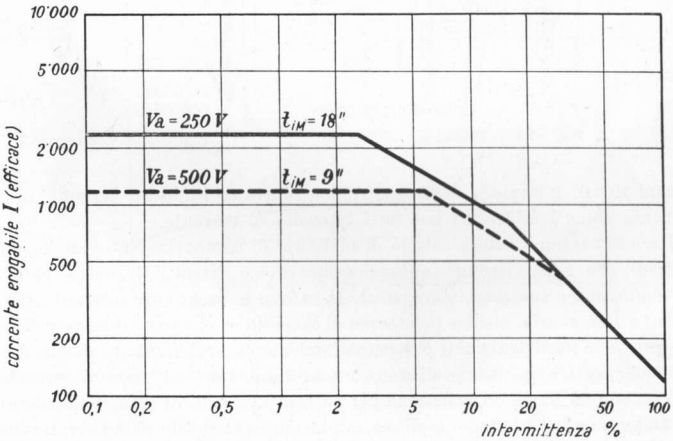


Fig. 86.6 – Curva caratteristica dell'ignitrone: corrente efficace in funzione dell'intermittenza percentuale.

pone in relazione l'intensità di corrente media erogabile da ciascun tubo in funzione della potenza complessivamente fornita al carico dai due tubi. La seconda invece pone in relazione il valore efficace dell'intensità di corrente fornita dai due tubi con l'intermittenza percentuale, intendendosi come tale il rapporto tra il tempo effettivo di lavoro (al carico) ed il tempo di integrazione massimo (tutto moltiplicato per 100).

87. - *Eccitroni. Senditroni.*

L'*eccitrone* differisce dall'ignitrone in quanto nel primo l'ignitore entra in azione solo una volta, all'accensione del tubo, mentre successivamente un elettrodo di eccitazione (fig. 87.1) provvede a mantenere la macchia catodica. Oltre questi elettrodi è presente la griglia per modo che a tubo innescato l'eccitrone può comportarsi come un tiratrone. Infine per evitare la formazione di archi inversi sono presenti tra griglia e catodo opportuni ripari. L'impiego degli eccitroni è piuttosto limitato: servono principalmente come rettificatori per forti intensità di corrente.

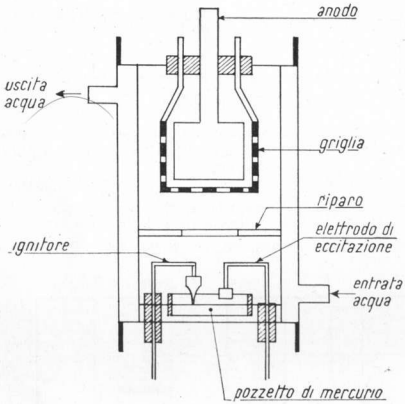


Fig. 87.1 – Eccitrone.

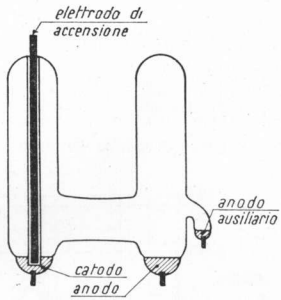


Fig. 87.2 – Senditrone.

I *sendritoni* sono tubi a catodo di mercurio di comportamento analogo agli ignitroni che sostituiscono vantaggiosamente nei circuiti di bassa potenza. Un senditrone è indicato in fig. 87.2. Il catodo è anche ora costituito da un pozzetto di mercurio, mentre l'elettrodo di accensione, che tiene il posto dell'ignitore presente negli ignitroni, è separato dal mercurio del catodo da un materiale isolante. L'applicazione di una elevata d.d.p. tra l'elettrodo di accensione ed il catodo dà luogo ad emissione per elevata intensità di campo elettrico. Se contemporaneamente viene applicato un elevato potenziale all'anodo ausiliario gli elettroni accelerati possono ionizzare il vapore di mercurio ed avviare la scarica che si trasferisce all'anodo. Un grande vantaggio del senditrone consiste

nella bassa potenza richiesta per l'accensione e nella elevata frequenza di ripetizione che si può raggiungere nell'innesco. Il senditrone è adatto per circuiti in cui sono richiesti frequenti impulsi di forte intensità di corrente. L'anodo principale e l'anodo ausiliario sono anch'essi costituiti da pozzetti di mercurio, il che ne garantisce una lunga durata.

88. - *Diodi a gas a catodo freddo.*

Il *diodo a gas a catodo freddo* differisce da quello a catodo caldo per l'assenza del riscaldamento catodico. Ciò porta a notevoli differenze nel funzionamento dei due tipi di diodi a gas.

Sia dato un diodo a gas a catodo freddo. Tra i suoi elettrodi inizialmente non sia applicata nessuna d.d.p. A causa della energia raggiante sempre presente (raggi cosmici, raggi ultravioletti, raggi X, ecc.) si ha spontaneamente nell'interno del diodo una ionizzazione delle molecole del gas. Si dissociano così ioni positivi ed elettroni negativi *primari* animati da un moto disordinato nell'interno del diodo. Allorchè tra anodo e catodo si applica una piccola d.d.p. gli ioni positivi e gli elettroni sollecitati dall'azione del campo elettrico si dirigono rispettivamente verso il catodo e verso l'anodo. Si ha così una intensità di corrente elettrica, tuttavia molto debole (dell'ordine del μA). Con l'aumentare della tensione anodica l'intensità di corrente inizialmente aumenta per poi

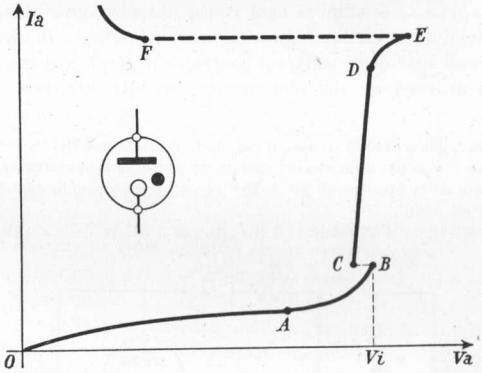


Fig. 88.1 – Diodo a gas a catodo freddo ad elettrodi asimmetrici e relativa caratteristica anodica.

raggiungere la saturazione quando la tensione è tale per cui tutti gli ioni e gli elettroni dissociati nell'unità di tempo vengono, nell'unità di tempo, convogliati verso gli elettrodi (tratto OA della fig. 88.1).

Se si aumenta ulteriormente la d.d.p. tra anodo e catodo fino a superare il potenziale di ionizzazione del gas ($10 \div 25\ V$), l'intensità di corrente riprende a crescere (tratto AB di fig. 88.1) poichè alla corrente dovuta alla ionizzazione

primaria (agenti esterni) si aggiunge quella dovuta alla *ionizzazione secondaria* prodotta da elettroni (ed anche, ma in misura minore da ioni) che accelerati dal campo elettrico acquistano energia sufficiente per ionizzare le molecole di gas contro cui vanno ad urtare. La scarica che avviene in corrispondenza del tratto AB di fig. 88.1 prende il nome di *scarica di Townsend*. Essa di solito è invisibile e non si sostiene da sola; se cioè si eliminano le cause della ionizzazione primaria cessa nel diodo ogni, per quanto piccolo, passaggio di corrente.

Allorchè è raggiunta la tensione anodica corrispondente al punto B di fig. 88.1 (potenziale di innesco: $75 \div 400\ V$) l'intensità del campo elettrico raggiunge un valore tale per cui l'energia cinetica con cui gli ioni vanno ad urtare il catodo è in grado di produrre l'emissione secondaria di elettroni dal catodo stesso [1]. Gli elettroni prodotti dall'emissione secondaria vanno ad aggiungersi a quelli già presenti nel tubo facendo ancora aumentare la ionizzazione. Questa forte ionizzazione, che si traduce nella presenza nel diodo di un grandissimo numero di ioni ed elettroni, fa sì che il diodo si comporti come un buon conduttore riducendosi notevolmente la sua resistenza interna. Di conseguenza si ha pure una diminuzione della caduta di tensione nel diodo, la rimanente parte venendo assorbita dalla resistenza che deve sempre essere presente in circuiti comprendenti diodi a gas per evitare correnti distruttive [2]. Sulla caratteristica si passa quindi dal punto B al punto C. Successivamente si ha un forte aumento di intensità di corrente anodica per un piccolo aumento di tensione anodica (tratto CD). In questo tratto di caratteristica la scarica diviene autosostenuta; essa persiste anche se si elimina ogni causa di ionizzazione primaria. Inoltre la scarica è luminescente (luminescenza normale). Questa luminescenza è dovuta ai numerosi urti degli elettroni contro le molecole del gas. Buona parte di questi urti provvedono alla ionizzazione; gli altri, di energia insufficiente

---

[1] Nei diodi a gas a catodo freddo, il catodo non può essere del tipo con rivestimento ad ossidi, perchè il bombardamento del catodo da parte degli ioni avviene sotto tensioni molto più elevate della tensione di $20 \div 25V$ che è appunto quella che determina la rovina dei catodi ad ossidi.

[2] La fig. 88.2 illustra ad esempio il circuito per il rilievo della caratteristica anodica

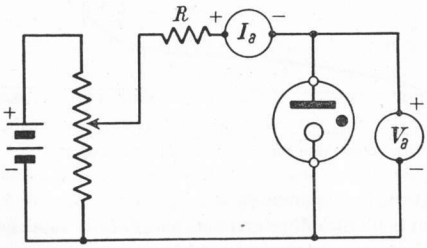


Fig. 88.2 – Circuito per il rilievo della caratteristica anodica di un diodo a gas a catodo freddo.

di un diodo a gas a catodo freddo: si noti la resistenza R limitatrice di corrente.

per ionizzare, fanno passare gli atomi del gas dallo stato normale allo stato eccitato dovuto alla migrazione degli elettroni periferici su orbite più esterne di maggior energia. Il ritorno di questi elettroni sulle orbite originarie più interne avviene con l'emissione dell'energia, precedentemente ricevuta, sotto forma di fotoni o quantità elementari di energia luminosa. L'energia di un fotone è associata ad una frequenza (che determina il colore della scarica luminosa) caratteristica per ogni gas usato.

Nel tratto *CD* si può constatare che nonostante l'aumento considerevole di intensità di corrente la tensione rimane praticamente costante. Ciò succede perchè un aumento di intensità di corrente provoca un aumento della superficie catodica interessata all'emissione secondaria e quindi anche della colonna di ioni e di elettroni che si dirigono verso i rispettivi elettrodi; in pratica aumenta la sezione del conduttore-diodo e quindi diminuisce la sua resistenza interna che, compensando l'aumento della intensità di corrente, determina la costanza della caduta di tensione.

In fig. 88.3 è riportata la distribuzione dei potenziali nell'interno di un diodo a gas a catodo freddo. Essa non differisce in pratica da quella che si ha nei diodi a gas a catodo caldo. La maggior caduta di tensione si ha nelle vicinanze immediate del catodo (zona *OM*). Qui vi sono sia elettroni che ioni positivi, ma data la ridotta velocità di questi ultimi nei confronti di quella degli elettroni si verifica una sovrabbondanza degli ioni sugli elettroni e quindi una carica spaziale positiva con cui si giustifica la forte caduta di tensione. La zona *OM* è pressochè buia. Nella zona *MN* si hanno invece le caratteristiche di un buon conduttore per l'elevata presenza contemporanea sia di ioni positivi che di elettroni negativi che insieme formano il plasma da cui emana la luce caratteristica del gas impiegato. Nella zona del plasma è quasi nulla la caduta di tensione.

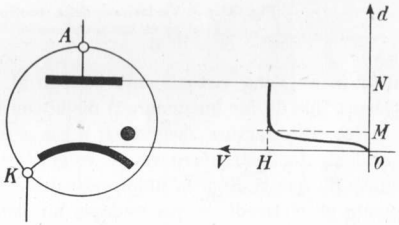


Fig. 88.3 – Distribuzione dei potenziali nell'interno di un diodo a gas a catodo freddo.

Oltre il punto *D* della caratteristica anodica (fig. 88.1) la corrente aumenta a spese di un maggior aumento di tensione essendo ormai tutta la superficie catodica interessata dalla emissione secondaria: si passa dalla luminescenza normale alla luminescenza anormale.

Oltre il punto *E* si ha la scarica ad arco analoga a quella che si verifica nei diodi a gas a catodo caldo.

Il normale impiego dei diodi a gas a catodo freddo è limitato al tratto di caratteristica lineare compreso tra i punti *C* e *D*.

Per quanto riguarda la tensione di innesco dei diodi a gas a catodo freddo si può ripetere quanto è stato detto per la tensione inversa dei diodi a gas a catodo caldo; solo che per il caso che ora interessa il prodotto pressione × di-

stanza elettrodi viene scelto in funzione della tensione alla quale si vuole che il diodo a gas inneschi. È interessante notare che il diagramma di fig. 88.4 può dare una spiegazione del tratto BC della caratteristica di fig. 88.1. Se infatti per un dato diodo la tensione di innesco V_i corrisponde ad un prodotto $p \times d$ maggiore di quello per cui si ha la $V_{i\,min}$, la formazione del plasma privo di resistenza avvicina virtualmente l'anodo al catodo portandolo ad una distanza plasma tale da far funzionare il diodo con la $V_{i\,min}$.

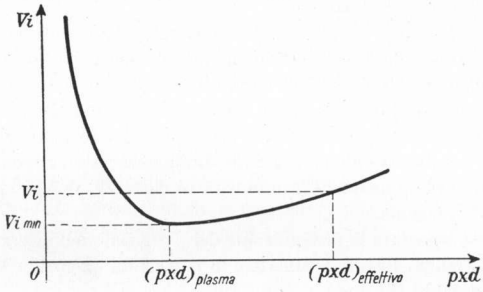


Fig. 88.4 – Variazione della tensione di innesco in funzione del prodotto pressione × distanza elettrodi.

Occorre osservare che i diodi a gas a catodo freddo, funzionando senza riscaldamento, potrebbero essere conduttori bidirezionali. Se si vuole ottenere anche da questi diodi la unidirezionalità è necessario differenziare costruttivamente gli elettrodi. Se per esempio un elettrodo è costituito da un filo sottile rettilineo e l'altro da un cilindro coassiale con il filo, la conduzione sarà facilitata nel senso (convenzionale) filo (anodo) — cilindro (catodo). Si può aumentare la asimmetria tra gli elettrodi facendo il catodo di materiale avente potenziale intrinseco minore del potenziale intrinseco del materiale costituente l'anodo.

Il gas più comunemente usato in questo tipo di diodo è l'argon. L'applicazione più comune del diodo a gas a catodo freddo, che è quella di stabilizzatore di tensione, verrà esaminata successivamente.

89. – *Triodi a gas a catodo freddo (trigger).*

I tubi elettronici a catodo freddo possono avere, oltre l'anodo ed il catodo, un terzo elettrodo denominato griglia per analogia con i triodi a vuoto, ma più spesso detto *starter* (avviatore). La sua struttura è molto diversa da quella di una griglia propriamente detta: di solito è un filo sottile posto nelle vicinanze del catodo (fig. 89.1). In questi tubi la tensione anodica di innesco viene a dipendere dalla tensione di starter; essendo quest'ultimo molto più vicino al catodo che non l'anodo, una tensione starter-catodo relativamente bassa può essere sufficiente a determinare la scarica tra starter e catodo; una volta che

questa sia avviata, a causa degli elettroni che sfuggono all'azione dello starter, la scarica può trasferirsi tra anodo e catodo (purchè si abbia una sufficiente tensione anodica). Successivamente lo starter (come avviene nei tiratroni) perde ogni proprietà di controllo sulla corrente anodica ed in questo si manifesta la sua differenza nei confronti della griglia dei tubi a vuoto. Infatti se lo starter è positivo attira gli elettroni i quali oltre a determinare una corrente di starter formano attorno all'elettrodo una carica spaziale negativa che ne neutralizza gli effetti. Se invece lo starter è negativo attira gli ioni positivi i quali schermano ugualmente l'azione dell'elettrodo. Perchè la corrente anodica si interrompa non è quindi sufficiente a scarica innescata abbassare la tensione di starter, ma è assolutamente necessario ridurre

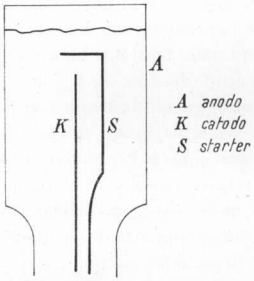


Fig. 89.1 – Costituzione interna di un triodo a gas a catodo freddo.

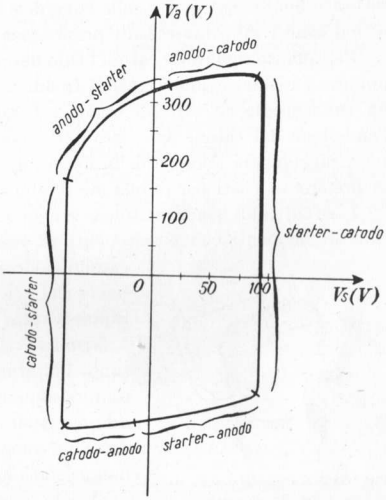


Fig. 89.2 – Caratteristica di innesco di un triodo a gas a catodo freddo.

la tensione anodica ad un valore detto di disinnesco, inferiore a quello di innesco.

Il comportamento di un triodo a gas a catodo freddo viene illustrato dalla sua caratteristica di innesco che è della forma indicata in fig. 89.2. Le coppie di valori della tensione anodica e della tensione di starter comprese entro il diagramma corrispondono ad impossibilità di innesco, mentre questo può avvenire per coppie di valori corrispondenti a punti situati sul diagramma o fuori di esso. La scarica può poi proseguire anche se si passa a condizioni rappresentate da punti interni al diagramma. Sulle varie parti del diagramma è indicato tra quali elettrodi avviene la scarica; il primo quadrante è quello di normale funzionamento.

90. – *Tubi fluorescenti.*

Nella categoria dei tubi a gas rientrano pure i *tubi fluorescenti* destinati alla illuminazione. A differenza delle lampade ad incandescenza nelle quali le radiazioni luminose sono dovute ad un filamento che viene portato all'incadescenza, nei tubi fluorescenti per ottenere radiazioni luminose si sfrutta la scarica in un gas o direttamente o indirettamente per mezzo della eccitazione di particolari sostanze fluorescenti poste sulla superficie interna dell'involucro del tubo (questi ultimi sono i tubi fluorescenti propriamenti detti).

Per quanto riguarda i catodi i tubi fluorescenti possono essere a catodo freddo oppure a catodo caldo. I catodi freddi assumono la forma di un cilindro o di un cono spesso rivestiti di ossidi a basso lavoro di estrazione. Per ottenere l'emissione dai catodi non riscaldati sono necessarie elevate tensioni che possono raggiungere l'ordine delle decine di migliaia di volt. Questi tipi vengono di preferenza usati per le insegne luminose.

I catodi caldi sono quelli che vengono riscaldati. Essi sono in genere costituiti di filamenti con rivestimenti di ossidi. Per il funzionamento dei tubi a catodo caldo è sufficiente una tensione molto più bassa che per i tubi a catodo freddo. In fig. 90.1 è rappresentato uno di questi catodi indicato con K. I terminali A ad esso collegati fanno sì che durante l'alternanza positiva (questi tubi sono quasi sempre alimentati con tensione alternata ed hanno due elettrodi che funzionano alternativamente da catodo e anodo) non venga bombardato e quindi danneggiato lo strato emittente del catodo.

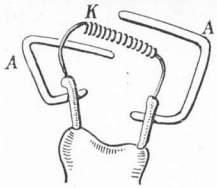


Fig. 90.1 – Catodo caldo di un tubo fluorescente.

Esiste ancora un tipo di catodo che partecipa alle proprietà di entrambi i tipi a catodo freddo e a catodo caldo. È un catodo che inizia il funzionamento come catodo freddo e viene successivamente riscaldato dal bombardamento elettronico in modo da funzionare come catodo caldo senza però richiedere una sorgente di riscaldamento.

I tubi fluorescenti differiscono tra loro, oltre che per il tipo di catodo, per il gas di riempimento usato e per la pressione di esso. Il gas di riempimento determina il colore delle radiazioni luminose. Queste sono concentrate in radiazioni di lunghezze d'onda tipiche per ogni gas [1]. Se però la pressione è elevata le radiazioni tipiche del gas divengono via via meno concentrate allargandosi su bande (spettro) ad emissione continua. Il diagramma che rappresenta in funzione della lunghezza d'onda l'intensità delle radiazioni di un tipo di gas

---

[1] La lunghezza d'onda di una radiazione λ è legata alla frequenza f della radiazione stessa dalla relazione $\lambda = c/f$ in cui c è la velocità della luce: $c = 3.10^8$ m/sec. Come unità di misura delle lunghezze d'onda conviene assumere l'Angstrom (Å) essendo $1 Å = 10^{-7}$ mm.

prende il nome di *spettrogramma*. In fig. 90.2 sono indicati gli spettrogrammi dei gas o vapori più usati nei tubi fluorescenti. È messa in evidenza anche la sensibilità dell'occhio umano e le zone dei colori dell'iride. Se la pressione diminuisce aumenta l'intensità delle radiazioni luminose di minore lunghezza d'onda.

Nei tubi contenenti vapori di sodio si hanno radiazioni monocromatiche sul giallo-arancio indipendentemente dalla pressione in quanto non esistono altre righe nello spettrogramma.

Per il neon lo spettro è più complesso verso le lunghezze d'onda più elevate (arancio, rosso); il neon ha il vantaggio di poter essere usato a pressioni e temperature normali.

Lo spettro del vapore di mercurio possiede righe molto distanziate tra loro, in modo che risulta con esso efficace la variazione di pressione.

Nei tubi in esame si possono sfruttare le radiazioni luminose dovute alla scarica nel gas ed allora si hanno i *tubi luminescenti*. Il rendimento luminoso di questi tubi non è molto elevato in quanto sono utili solo le radiazioni emesse

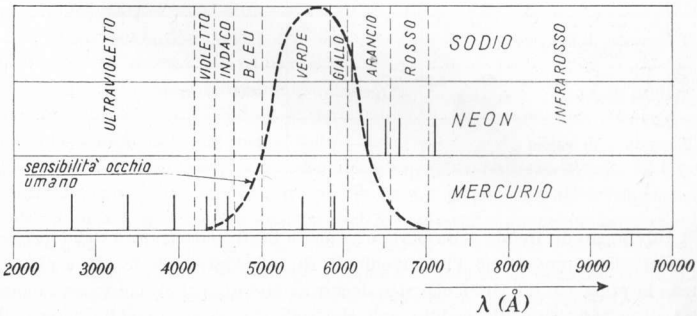


Fig. 90.2 – Spettrogrammi di gas o vapori usati nei tubi fluorescenti e sensibilità dell'occhio umano.

nel campo visivo. Inoltre la struttura discontinua dello spettro dei vapori o gas usati dà una luce sgradevole (sodio o mercurio) mentre le radiazioni emesse nel campo dell'ultravioletto (mercurio), oltre non essere visibili, possono risultare dannose.

Il rendimento luminoso aumenta di molto se si riesce a trasferire le radiazioni ultraviolette nel campo visibile, meglio ancora se con un'ampia distribuzione spettrale. Questo si può ottenere con i *tubi fluorescenti* propriamente detti che hanno l'involucro internamente rivestito (*spolverato*) di particolari sostanze (*fosfori*) che godono della proprietà di emettere radiazioni visibili allorchè sono colpite da radiazioni di lunghezza d'onda inferiore (ultravioletto). Nella tabella seguente sono riportati alcuni fosfori impiegati per i tubi fluore-

scenti: sono indicati anche gli *attivanti* che sono elementi metallici che favoriscono l'emissione di energia luminosa. I primi tre fosfori presentano pure la caratteristica di essere *fosforescenti* cioè di presentare una persistenza della emissione anche dopo che si è annullata la radiazione incidente. I fosfori presentano una curva di emissione continua con un massimo per il colore indicato nella tabella.

Fosfori	Attivanti	Massimo delle radiazioni emesse
Borato di cadmio	Manganese	6200 Å Verde arancio
Silicato di cadmio	Manganese	5900 Å Verde arancio chiaro
Silicato di zinco e berillio	Manganese	5230 ÷ 6500 Å Verde arancio
Silicato di zinco (Willemite)	Manganese	5230 Å Verde
Tungstato di magnesio	—	4800 Å Azzurro chiaro
Solfuro di zinco	Argento	4600 Å Azzurro
Tungstato di calcio	—	4300 Å Viola pallido

I tubi a catodo freddo sono particolarmente usati nella tecnica delle insegne luminose. Essi presentano l'inconveniente di richiedere una tensione elevata (anche la pressione interna è elevata: decine di mm di Hg), di cui inoltre buona parte deve sopperire alla caduta agli elettrodi che si aggira sull'ordine delle centinaia di volt. È sempre scarso quindi il rendimento elettrico, mentre il rendimento luminoso è scarso nei tubi non spolverati (15 lumen/watt) [1], divenendo invece abbastanza soddisfacente per quelli spolverati (55 lumen/watt).

I tubi a catodo caldo hanno il vantaggio di poter funzionare con tensioni anodiche molto più basse che non i tubi a catodo freddo, sia a causa del riscaldamento sia per la minore caduta di tensione agli elettrodi (ordine delle decine di volt) sia per la minore pressione del gas di riempimento (micron di mercurio). Naturalmente le caratteristiche costruttive dei tubi a catodo caldo sono molto più delicate di quelle dei tubi a catodo freddo.

---

[1] Si ricordi che il lumen è l'unità di misura del flusso luminoso e che il rendimento massimo corrisponde a 620 lumen/watt.

Il colore delle radiazioni emesse dipende dalla spolveratura interna dell'involucro. Sono unificate le tonalità di bianco nei seguenti tipi:

a) *Daylight*: luce diurna a 6500 °K (1)
b) *4500° White*: luce bianca a 4500 °K
c) *White*: bianco tipico a 3500 °K
d) *Soft White*: bianco caldo
e) *Warmtone*: bianco tipo incandescenza a 2750 °K.

I rendimenti luminosi dei tubi a catodo caldo superano i 50 lumen/watt. I rendimenti migliori (oltre i 60 lumen/watt) si ottengono con i tipi denominati *slimline*, sottili ed allungati, nei quali l'avviamento avviene come per i tubi a catodo freddo.

La tensione di innesco di un tubo fluorescente, a causa del gas in esso contenuto, è notevolmente più elevata della tensione necessaria a mantenere la scarica. Bisogna provvedere quindi a far sì che la tensione d'alimentazione sia più elevata all'innesco che durante la scarica oppure a provocare mediante una opportuna impedenza la caduta di tensione sovrabbondante. La prima soluzione è adottata per i tubi a catodo freddo nei quali la tensione di innesco è fornita da un trasformatore elevatore (fig. 90.3). La costruzione del trasformatore è tale che durante la scarica esso fornisce ai suoi capi una tensione inferiore che all'avviamento.

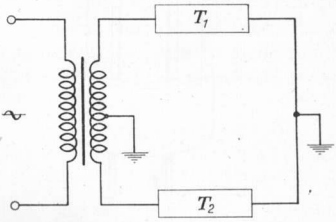


Fig. 90.3 – Alimentazione di tubi fluorescenti a catodo freddo mediante trasformatore elevatore.

Per i tubi a catodo caldo invece l'opportuna caduta di tensione viene prodotta in una impedenza reattiva (*reattore*) disposta in serie al tubo. Il reattore ha anche un'altra funzione da assovere durante l'avviamento. Lo schema più semplice di un circuito con tubo fluorescente a catodo caldo è quello di fig. 90.4. In esso R rappresenta il reattore ed S un dispositivo particolare detto *starter* (avviatore). Alla chiusura dell'interruttore T inserito nel circuito di alimentazione lo starter risulta chiuso. La corrente passa nei filamenti contenuti nel tubo riscaldandoli in modo che essi emettano elettroni; questi ionizzano il gas contenuto nel tubo rendendo possibile l'innesco. A questo

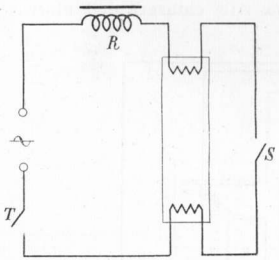


Fig. 90.4 – Circuito di alimentazione di un tubo fluorescente a catodo caldo.

(1) La temperatura in °K indica la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero incandescente per dare la medesima tonalità.

punto lo starter si apre e nel reattore si determina una sovratensione di apertura sufficiente per l'innesco della scarica tra gli elettrodi del tubo. A scarica innescata il reattore provvede a limitare l'intensità di corrente nel tubo.

Un tipo di starter è quello indicato in fig. 90.5. Esso consiste in una piccola lampada al neon con due elettrodi di cui uno fisso e l'altro costituito da una

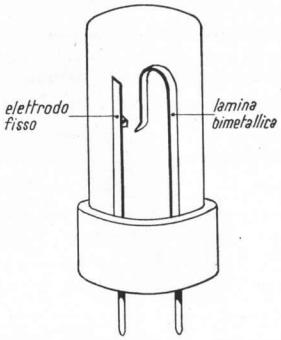


Fig. 90.5 – Starter luminescente.

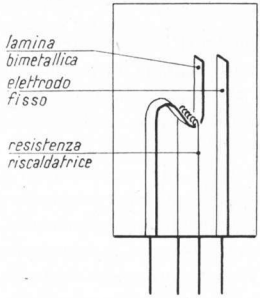


Fig. 90.6 – Starter con resistenza di riscaldamento.

lamina bimetallica. Alla chiusura dell'interruttore T di fig. 90.4 la tensione di linea è sufficiente ad innescare l'arco nella lampada al neon; il passaggio di corrente che ne deriva produce il riscaldamento della lamina bimetallica che si deforma in modo da portarsi a contatto con l'elettrodo fisso. Cessando la corrente di scarica la lamina bimetallica si raffredda ed il circuito di starter si interrompe provocandosi così la sovratensione nel reattore.

Un altro tipo di starter è quello indicato in fig. 90.6 che viene inserito in un circuito del tipo di quello di fig. 90.7. In esso in condizione di riposo la lamina bimetallica è a contatto con l'elettrodo fisso. Alla chiusura dell'interrut-

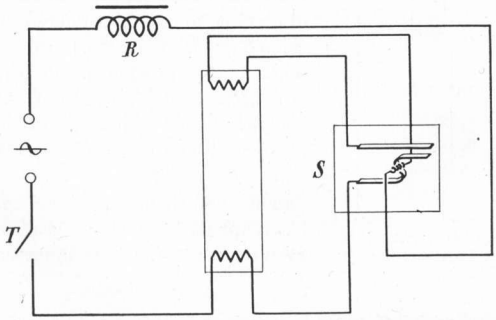


Fig. 90.7 – Circuito di alimentazione di un tubo fluorescente a catodo caldo: starter con resistenza di riscaldamento.

tore T la corrente che provvede al riscaldamento degli elettrodi del tubo passa pure nella resistenza riscaldatrice dello starter che fa separare e tiene separata per tutto il periodo di funzionamento la lamina bimetallica dell'elettrodo fisso [1].

In genere conviene porre un condensatore in derivazione sullo starter onde evitare disturbi alle apparecchiature radiofoniche; è poi necessario provvedere al rifasamento dell'impianto mediante condensatore di opportuna capacità derivato sull'alimentazione. Questa necessità è causata dalla presenza del reattore che produce un forte sfasamento dell'intensità di corrente rispetto alla tensione.

Un inconveniente dei tubi fluorescenti è il cosiddetto *effetto stroboscopico*, cioè la visione ferma o rallentata di oggetti in movimento periodico con frequenza prossima a quella con cui fluttua l'intensità luminosa del tubo a causa dello spegnimento dell'arco ad ogni semiperiodo. Questo effetto viene ridotto provvedendo ad uno sfasamento opportuno tra le tensioni applicate alle diverse lampade di un medesimo impianto.

---

[1] Vi sono pure dei tubi fluorescenti che possono avviarsi istantaneamente senza necessità dello starter. Sono ad esempio le *slimline* precedentemente menzionate od anche tubi ordinari forniti però di una striscia metallizzata che ricopre longitudinalmente una porzione dell'involucro. La striscia metallizzata è collegata ad un terminale del reattore: la distribuzione di campo elettrico che si ha nell'interno del tubo è tale da favorire l'innesco anche con le ordinarie tensioni di funzionamento.

CAPITOLO XI

DIODI A SEMICONDUTTORE E TRANSISTORI

91. – *Semiconduttori. Donatori ed accettori.*

I *semiconduttori* sono quei materiali che presentano caratteristiche intermedie tra quelle dei conduttori e quelle degli isolanti. Le differenze si possono giustificare ricorrendo all'esame, anche solo superficiale, della struttura atomica degli elementi in oggetto. Gli atomi dei semiconduttori, quali ad esempio il germanio ed il silicio, presentano quattro elettroni periferici sullo strato orbitale più esterno (fig. 91.1, *a*). Dato che le caratteristiche elettriche dipendono appunto dagli elettroni più esterni, l'atomo di un semiconduttore si può rappresentare (fig. 91.1, *b*) con un nocciolo centrale avente quattro cariche elementari positive (ciascuna corrispondente alla carica dell'elettrone $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)

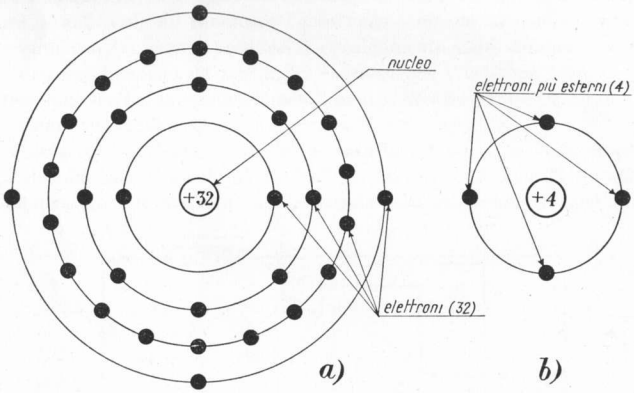


Fig. 91.1 – Atomo di germanio e sua rappresentazione equivalente.

e con quattro elettroni periferici. La struttura atomica di un semiconduttore è intermedia tra quella di un buon isolante il cui strato più esterno è completo di otto elettroni (struttura più compatta) e quella di un buon conduttore sul cui strato più esterno è presente un unico elettrone che si rende facilmente libero.

Per la tendenza degli strati più esterni a rendersi completi di otto elettroni, gli atomi dei semiconduttori si legano tra di loro ponendo a due a due in comune (fig. 91.2) una coppia di elettroni (*legami covalenti*). La struttura cristallina che ne deriva risulta molto compatta. Tuttavia la naturale agitazione termica fa sì che vi siano dei legami covalenti che si rompano rendendo liberi alcuni (relativamente pochi) elettroni. Di conseguenza di fronte ad una resistività piuttosto bassa dei buoni conduttori (0,0164Ωmm²/m per l'argento; 0,0175Ωmm²/m per il rame) i semiconduttori presentano una resistività elevata (0,47MΩmm²/m per il germanio; 2300MΩmm²/m per il silicio). Un'altra notevole differenza sta nel fatto che mentre per i conduttori con l'aumento della temperatura la resistività aumenta (perchè aumentando il numero di elettroni liberi maggiore diviene l'ostacolo che questi incontrano sul loro cammino) per i semiconduttori con l'aumento della temperatura la resistività diminuisce in quanto si rende libero un numero sempre maggiore di elettroni periferici a causa di un maggior numero di legami covalenti che si rompono [1].

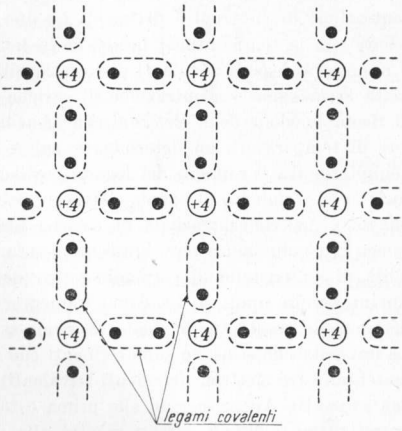


Fig. 91.2 – Rappresentazione schematica dei legami covalenti con i quali si legano gli atomi dei semiconduttori.

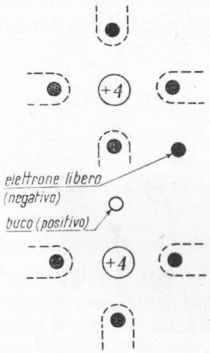


Fig. 91.3 – Formazione di una coppia elettrone-buco in seguito alla rottura di un legame covalente.

Quando un atomo di germanio (lo stesso potrebbe dirsi per un atomo di silicio) perde un elettrone periferico (fig. 91.3) nella massa cristallina si ha un elettrone libero che può vagare disordinatamente tra gli interstizi atomici. Il posto lasciato vuoto dall'elettrone prende il nome di *buco* (o lacuna) e poichè corrisponde alla mancanza di un elettrone fornisce all'atomo cui appartiene (prima complessivamente neutro) una carica positiva. Se l'elettrone libero si sposta senza venir catturato da alcun buco si ha nel cristallo di germanio una *conducibilità negativa* (per elettroni) detta anche di tipo *n*. Se invece appena l'elettrone si libera viene

[1] L'energia necessaria per rompere un legame covalente è di 0,75 eV (elettron-volt) per il germanio e di 1,12 eV per il silicio.

catturato da un buco ed a sua volta il buco lasciato libero dall'elettrone viene colmato da un altro elettrone e così via, nel cristallo di germanio si ha una *conducibilità positiva* (per buchi) detta anche di tipo *p*.

In un cristallo di germanio puro si ha nel medesimo istante una ugual concentrazione di elettroni e di buchi. Le due concentrazioni sono funzione crescente con la temperatura; infatti se la temperatura aumenta, aumenta pure il numero di legami covalenti dissociati nell'unità di tempo, però aumenta pure (data la maggior concentrazione di cariche di segno contrario) la probabilità di ricombinazione degli elettroni con i buchi. Si raggiunge quindi per ogni valore di temperatura un determinato valore delle concentrazioni stabilito dall'equilibrio tra il numero dei legami covalenti che nell'unità di tempo si dissociano ed il numero di coppie elettroni-buchi che nell'unità di tempo si ricompongono. La concentrazione di cariche libere crescente con la temperatura spiega la conducibilità pure crescente con la temperatura. Tuttavia la conducibilità di un cristallo di germanio puro (detta anche *conducibilità intrinseca*) rimane sempre limitata. La si può aumentare introducendo nel cristallo di germanio delle cosiddette *impurità* (o, come si suol dire, *drogando* il germanio). Le impurità che si usano sono elementi che sullo strato elettronico più esterno presentano tre elettroni (elementi trivalenti) oppure cinque elettroni (elementi pentavalenti). Appartengono alla prima categoria l'alluminio, il gallio e l'indio (quest'ultimo è il più usato), mentre alla seconda categoria appartengono il fosforo, l'antimonio e l'arsenico (quest'ultimo è il più usato).

Se si introducono in un cristallo di germanio puro delle impurità pentavalenti (fig. 91.4, *a*), quattro elettroni periferici di queste si legano in legami covalenti con quattro elettroni di altrettanti atomi di germanio in modo da entrare a far parte della compatta struttura cristallina. Il quinto elettrone che non rimane vincolato si rende libero [1] e conferisce al cristallo una condut-

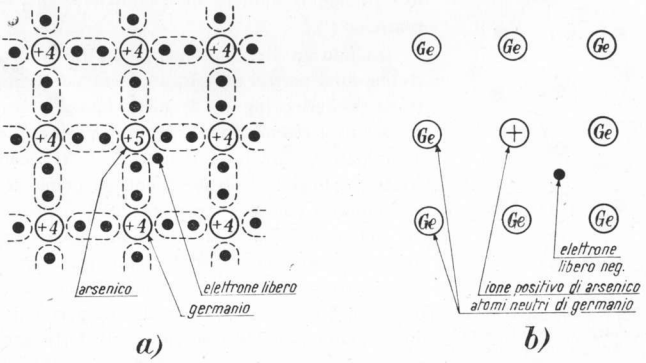


Fig. 91.4 – Cristallo di germanio con impurità pentavalente (donatore).

[1] Per rendere libero questo elettrone è sufficiente una energia di appena 0,01 eV

tività di tipo n. L'atomo della impurità pentavalente privato così di un suo elettrone periferico diviene uno ione positivo. L'impurità pentavalente prende anche il nome di *donatore* (di elettroni); il cristallo nel suo insieme sarà costituito (fig. 91.4, *b*) da atomi neutri di germanio (quasi tutti, tranne quei pochi nei quali l'agitazione termica produce la rottura di un legame covalente), da ioni positivi dell'atomo pentavalente e da elettroni liberi. Con riferimento alle sole cariche elettriche dissociate un cristallo di germanio contenente un donatore può essere rappresentato come in fig. 91.5.

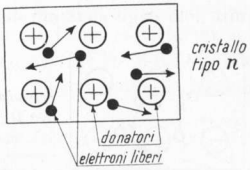


Fig. 91.5 – Cariche elettriche dissociate in un cristallo di tipo n.

Se invece in un cristallo di germanio puro si introducono delle impurità trivalenti (fig. 91.6, *a*), tre elettroni periferici di queste si legano in legami covalenti con tre elettroni di altrettanti atomi di germanio circostanti. Inoltre, per rendere compatta la struttura cristallina, appena si rompe un legame covalente di un atomo di germanio il relativo elettrone libero viene catturato [1]

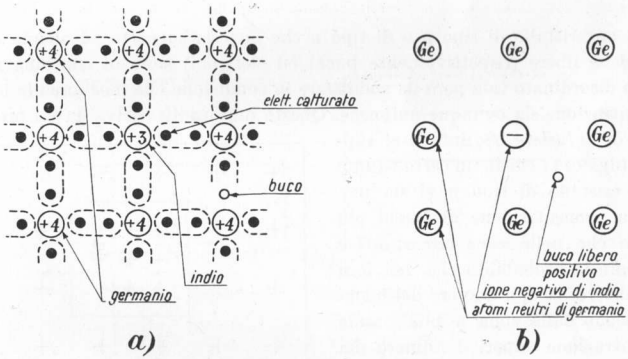


Fig. 91.6 – Cristallo di germanio con impurità trivalente (accettore).

dall'impurità per modo che rimane libero un buco e conferisce al cristallo una conduttività di tipo p. L'atomo della impurità trivalente cui si è aggiunto un elettrone periferico diviene uno ione negativo. L'impurità trivalente prende anche il nome di *accettore* (o accettatore di elettroni); il cristallo nel suo insieme sarà costituito (fig. 91.6, *b*) da atomi neutri di germanio, da ioni negativi dell'atomo trivalente e da buchi liberi. Con riferimento alle sole cariche elettriche

---

per il germanio e di 0,08 eV per il silicio. La naturale agitazione termica fa sì che in pratica tutti questi elettroni siano liberi.

[1] L'energia di cattura è di appena 0,01 eV per il germanio e di 0,08 eV per il silicio.

dissociate un cristallo di germanio contenente un accettore può essere rappresentato come in fig. 91.7.

Occorre notare che in un cristallo di tipo n le cariche libere non sono costituite solo dagli elettroni derivanti dalle impurità pentavalenti, ma anche dagli elettroni e buchi di origine termica derivanti dalla rottura di legami covalenti degli atomi di germanio; tuttavia, data la forte superiorità della concentrazione degli elettroni, i buchi hanno grande probabilità di ricombinazione appena si siano formati. Gli elettroni liberi si dicono cariche o *portatori di maggioranza* mentre i buchi prendono il nome di cariche o *portatori di minoranza*. Analogamente in un cristallo di tipo p i buchi rappresentano i portatori di maggioranza e gli elettroni i portatori di minoranza.

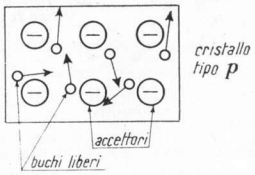


Fig. 91.7 – Cariche elettriche dissociate in un cristallo di tipo p.

92. – *Giunzione p-n.*

In un cristallo di tipo p o di tipo n che non sia soggetto ad alcuna d.d.p. le cariche libere (rispettivamente buchi ed elettroni) sono in continuo movimento disordinato tale però da soddisfare la condizione che mediamente la loro concentrazione sia ovunque uniforme. Questa uniformità deriva da un processo detto di *diffusione*. Se infatti si suppone (fig. 92.1) che in un certo istante in un cristallo di tipo p vi sia una zona a concentrazione di buchi più grande che nelle zone circostanti è maggiore la probabilità che, nel loro moto disordinato, il numero dei buchi che escono dalla zona a più grande concentrazione superi il numero dei buchi che vi entrano. Si stabilisce quindi in breve tempo l'uniformità della concentrazione.

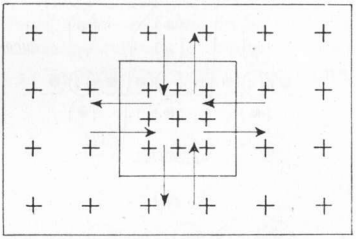


Fig. 92.1 – Processo di diffusione in un cristallo di tipo p con disuniforme concentrazione di buchi.

Si supponga ora di ottenere un cristallo unico dall'unione di due cristalli, uno di tipo p e l'altro di tipo n. Per semplicità si supponga pure che nei due cristalli la concentrazione delle impurità abbia il medesimo valore. Se si immaginano i due cristalli separati (fig. 92.2, a), in ciascuno di essi la concentrazione delle cariche fisse è in ogni zona uguale alla concentrazione delle cariche mobili di segno contrario (fig. 92.2, b). Non si ha quindi in alcun punto prevalenza di cariche di un segno su quelle di segno opposto; la concentrazione risultante è nulla in ogni punto di entrambi i cristalli. Se invece si suppone che i due cristalli vengano accostati, come in fig. 92.3, a), non si ha variazione nella concentra-

zione delle cariche fisse (in quanto, essendo fisse, non possono subire diffusione) mentre le cariche mobili diffondono attraverso la superficie di giunzione: gli elettroni verso la regione p ed i buchi verso la regione n. Nelle vicinanze della superficie di *giunzione* si determina quindi una neutralizzazione tra cariche mobili di segno contrario alterandosi in tal modo le distribuzioni delle singole concentrazioni (fig. 92.3, *b*) la cui risultante non è più nulla, tranne che lontano dalla superficie di giunzione (fig. 92.3, *c*). Più precisamente, venen-

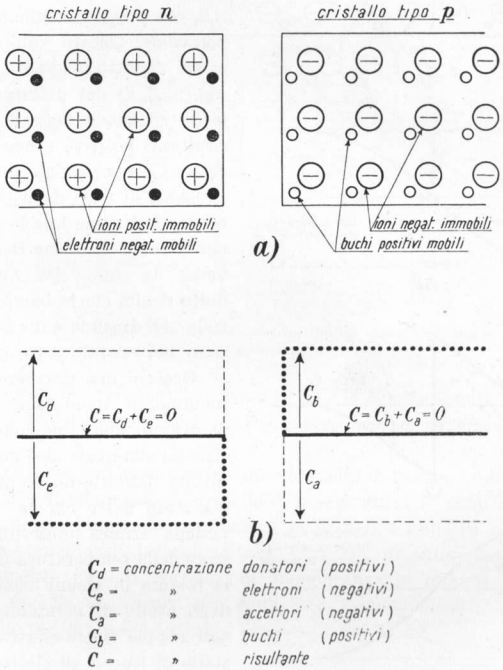


Fig. 92.2 – Distribuzione delle concentrazioni delle cariche elettriche fisse e mobili e delle concentrazioni risultanti in due cristalli di tipo diverso.

dosi a trovare nella regione n in eccesso i donatori sugli elettroni la concentrazione risultante è positiva, mentre è negativa nella regione p dove gli accettori prevalgono sui buchi.

Il processo di diffusione delle cariche mobili attraverso la superficie di giunzione è un fenomeno transitorio di breve durata. Infatti appena dalle due parti si stabiliscono concentrazioni risultanti di segno contrario nasce una d.d.p. che è tanto maggiore quanto più grandi sono i valori assoluti delle concentrazioni

risultanti non nulle e quanto maggiore è la loro estensione nei due cristalli. Questa d.d.p. (rivolta in senso convenzionale dalla concentrazione positiva verso quella negativa, H in fig. 92.3, *c*) ostacola una ulteriore diffusione di buchi verso la regione n e di elettroni verso la regione p fino a bloccarla definitivamente allorchè raggiunge un determinato valore finale ΔE, che prende il nome di *barriera di potenziale*. Questo valore finale può essere dedotto mediante integrazione (fig. 92.3, *d*) dal diagramma che dà la distribuzione delle concentrazioni risultanti positiva e negativa [1]. ΔE risulta proporzionale alla *larghezza* (frazione di mm) della giunzione, intendendosi come tale lo spazio entro cui la concentrazione risultante è diversa da zero. Da quanto finora detto risulta che la barriera di potenziale ΔE dipende dalle impurità presenti nei cristalli a contatto.

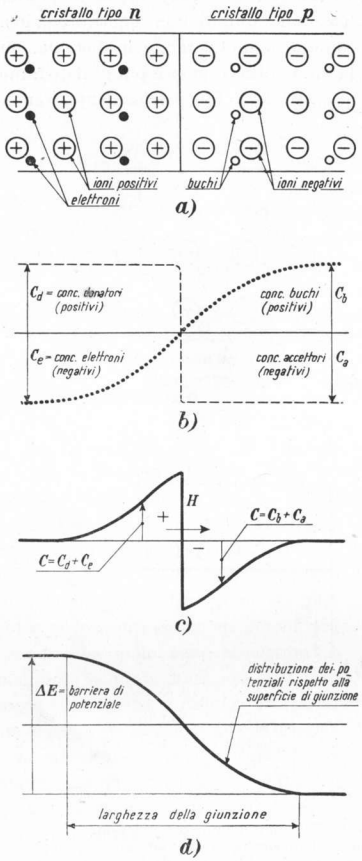


Fig. 92.3 – Giunzione di cristalli di tipo diverso. Distribuzione delle concentrazioni delle cariche elettriche fisse e mobili, delle concentrazioni risultanti e dei potenziali.

Occorre ora prendere in esame il movimento spontaneo di portatori attraverso una giunzione non polarizzata, alla quale cioè non venga applicata dall'esterno alcuna d.d.p. È già stato detto che la naturale agitazione termica (crescente con il crescere della temperatura T) determina la rottura di alcuni legami covalenti degli atomi di germanio originando così coppie buchi-elettroni. Nel cristallo di tipo n gli elettroni costituiscono i portatori di maggioranza ed i buchi i portatori di minoranza, mentre nel cristallo p sono portatori di maggioranza i buchi e portatori di minoranza gli elettroni. I portatori di

[1] Intuitivamente si può giustificare l'andamento dei potenziali indicato in fig. 92.3, *d*) pensando che una carica positiva che si trovi sulla superficie della giunzione deve compiere un lavoro (potenziale positivo) per passare nel cristallo n tanto maggiore quanto maggiore è il numero delle cariche positive non compensate che in esso incontra, mentre viene spontaneamente spinta (potenziale negativo) nel cristallo p tanto più facilmente quanto maggiore è il numero delle cariche negative non compensate che in esso incontra.

minoranza che si originano per agitazione termica vengono trasferiti al di là della giunzione ad opera della barriera di potenziale dando così origine ad una intensità di corrente I_0, detta *corrente di minoranza*, il cui verso (convenzionale) è concorde con il verso della d.d.p. dovuta alla barriera di potenziale (fig. 92.4). Questa corrente di minoranza è tanto più grande quanto maggiore è la temperatura T. Contemporaneamente alla corrente di minoranza si ha attraverso la giunzione una *corrente di maggioranza* I' dovuta alle cariche di maggioranza che ricevono

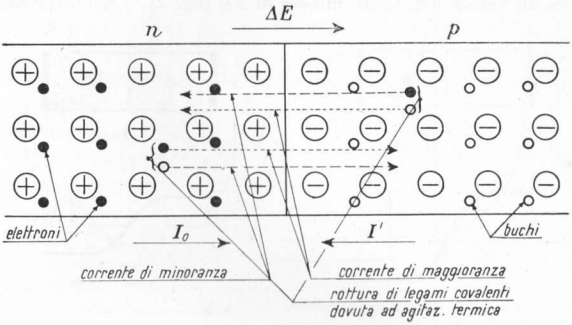


Fig. 92.4 – Movimento spontaneo di cariche mobili attraverso una giunzione non polarizzata.

(sempre per agitazione termica) una energia uguale o superiore a $\Delta E \times e$ (in cui e è la carica dell'elettrone) che è l'energia necessaria per superare la barriera di potenziale.

Per una giunzione non polarizzata, come è quella in esame, le due intensità di corrente, quella di minoranza I_0 e quella di maggioranza I', sono in ogni caso uguali per modo che l'intensità risultante $I = I' - I_0$ è nulla [1].

Si noti che aumentando la temperatura, oltre ad aumentare la corrente di minoranza aumenta pure la corrente di maggioranza in quanto aumenta il numero delle cariche che riceve per agitazione termica energia superiore a $\Delta E \times e$. Risulta sempre nulla tuttavia l'intensità risultante.

93. – *Diodi a semiconduttore.*

Un cristallo $p - n$ come quello considerato nel paragrafo precedente costituisce un *diodo a semiconduttore*, presentando una caratteristica spiccata-

[1] Che l'intensità I è nulla si può dimostrare per assurdo. Qualora infatti si ammettesse $I' < I_0$, essendo minore la corrente di maggioranza, dai due lati della giunzione diminuirebbero le concentrazioni di cariche fisse non compensate e di conseguenza il salto di potenziale ΔE. Sarebbe così maggiore il numero di cariche di maggioranza che potrebbe superare la giunzione, ossia la I' aumenterebbe fino ad uguagliare la I_0. Il contrario avverrebbe qualora si ammettesse $I' > I_0$. In definitiva sarebbe sempre il valore di I' che si adeguerebbe al valore di I_0.

mente unidirezionale presso a poco come quella dei diodi a vuoto e dei diodi a gas. Si è osservato che se la giunzione non è polarizzata (fig. 93.1) la corrente di minoranza attraverso la giunzione uguaglia la corrente di maggioranza cosicchè la corrente risultante è nulla. Se invece la giunzione è polarizzata mediante l'applicazione dall'esterno di una *tensione diretta* V_d [1] avviene che gli elettroni liberi del cristallo n ed i buchi del cristallo p sono sospinti verso la giunzione riducendone lo spessore e di conseguenza la barriera di potenziale; questa assume ora un valore ΔE_d tanto minore di ΔE (fig. 93.2) quanto maggiore è la

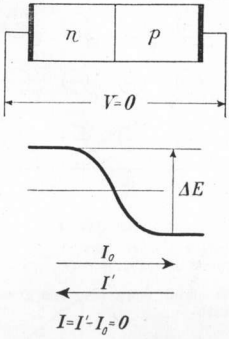


Fig. 93.1 – Giunzione non polarizzata: corrente nulla.

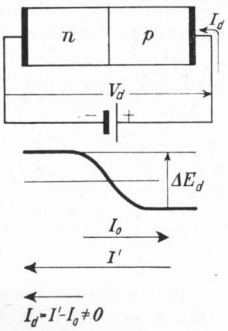


Fig. 93.2 – Giunzione polarizzata direttamente: corrente diretta.

V_d. Per una assegnata temperatura rimane invariata la produzione nell'unità di tempo (per agitazione termica) di coppie elettroni-buchi e quindi la corrente di minoranza ha ancora il medesimo valore I_0 presentato in assenza di polarizzazione. Essendo invece diminuita la barriera di potenziale risulta maggiore il numero dei portatori di maggioranza che nell'unità di tempo riesce a superare la giunzione e quindi la corrente di maggioranza I' risulta maggiore che in assenza di polarizzazione. La corrente risultante (*corrente diretta*) è perciò di intensità I_d diversa da zero e tanto più grande quanto maggiore è la tensione diretta V_d.

Se infine la giunzione è polarizzata mediante l'applicazione dall'esterno di una *tensione inversa* V_{in} (fig. 93.3), gli elettroni liberi del cristallo n ed i buchi del cristallo p vengono allontanati dalla superficie di giunzione, aumentando la larghezza della giunzione e quindi la barriera di potenziale che risulta ora ΔE_{in} tanto maggiore di ΔE quanto maggiore è la V_{in}. Rimanendo ancora invariata la corrente di minoranza I_0, risulta invece ridotta la corrente di maggio-

---

[1] Prende il nome di *tensione diretta* quella che polarizza positivamente il cristallo p e negativamente il cristallo n; la tensione contraria prende invece il nome di *tensione inversa*.

ranza I' a causa del minor numero di portatori di maggioranza che posseggono energia sufficiente a superare la barriera di potenziale. La corrente inversa risultante I_{in} è diversa da zero e tanto maggiore quanto più grande è la tensione inversa V_{in}, per lo meno fintantochè ΔE_{in} non raggiunge un valore così elevato da annullare completamente la corrente di maggioranza. In questo caso la corrente inversa raggiunge il valor massimo I_0 che non viene superato. Si ha così

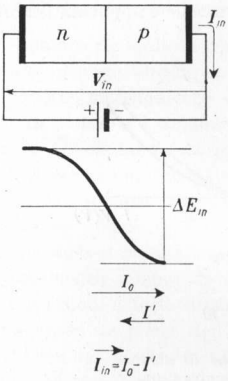


Fig. 93.3 – Giunzione polarizzata inversamente: corrente inversa.

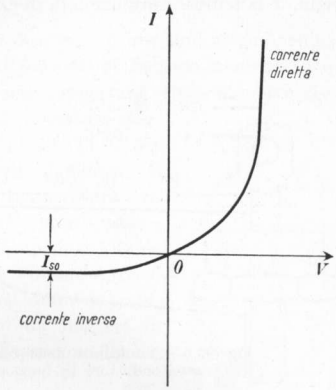


Fig. 93.4 – Caratteristica di un diodo a semiconduttore.

un fenomeno di saturazione e la I_0 prende anche il nome di *corrente inversa di saturazione* e si indica pure con $I_{s0} = I_0$.

Le considerazioni svolte finora si compendiano nella *caratteristica* del diodo a semiconduttore che è del tipo indicato in fig. 93.4. Per essa occorre osservare che la scala della corrente diretta è diversa da quella della corrente inversa a causa della esiguità di quest'ultima che altrimenti non sarebbe graficamente apprezzabile (1).

(1) Lo schema per il rilievo della caratteristica del diodo a semiconduttore è indicato in fig. 93.5. In esso è usato il simbolo del diodo a semiconduttore nel quale il triangolo rappresenta il cristallo p (anodo) ed il tratto rettilineo il cristallo n (catodo). Oltre agli strumenti di misura e al dispositivo di regolazione della tensione è presente una resistenza R di protezione contro le correnti eccessive. Per il rilievo della caratteristica inversa occorre scambiare le polarità del generatore e degli strumenti usando un amperometro di maggior sensibilità.

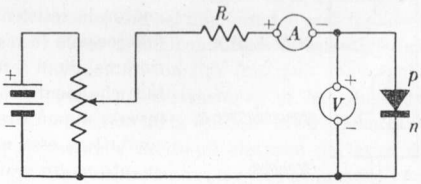


Fig. 93.5 – Circuito per il rilievo della caratteristica di un diodo a semiconduttore.

La caratteristica del diodo a semiconduttore può essere analiticamente approssimata dalla relazione:

$$I = I_{s0}\left(e^{\frac{11.600}{T}V} - 1\right) \tag{93.1}$$

in cui I_{s0} è l'intensità di corrente inversa di saturazione, e la base dei logaritmi neperiani, T la temperatura assoluta in ^oK e V la tensione applicata (sia diretta

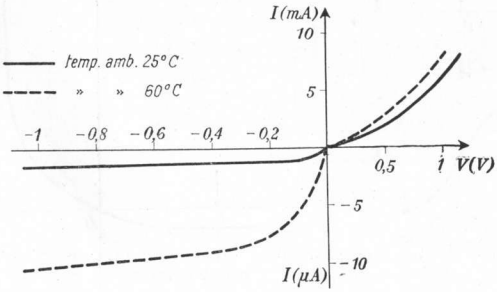


Fig. 93.6 – Variazione delle caratteristiche di un diodo a semiconduttore in funzione della temperatura.

che inversa). Dei due termini che compaiono nella 93.1 il primo esprime la corrente di maggioranza ed il secondo la corrente di minoranza.

La caratteristica del diodo a giunzione varia al variare della temperatura. Infatti con questa varia in modo piuttosto rilevante la corrente inversa di saturazione che precisamente aumenta con la temperatura. Ne risulta che la corrente inversa aumenta notevolmente con la temperatura mentre l'aumento della corrente diretta è poco sensibile, come si può rilevare osservando che nell'esponenziale della 93.1 T compare a denominatore. In fig. 93.6 sono rappresentate due caratteristiche di un medesimo diodo al germanio ricavate per temperature diverse di funzionamento.

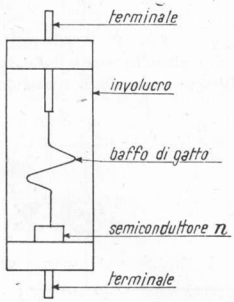


Fig. 93.7 – Diodo a punta di contatto.

Per i diodi a semiconduttore valgono le considerazioni fatte per i diodi a vuoto per quanto riguarda la resistenza statica e la resistenza interna differenziale (o resistenza dinamica) che però è inferiore nei diodi a semiconduttore. Occorre però notare che mentre per i diodi a vuoto la resistenza inversa si può ritenere infinita, per il diodo a semiconduttore essa non assume un valore infinito per quanto molto grande ($100k\Omega \div 1M\Omega$).

Oltre i diodi a giunzione fin qui descritti hanno grande importanza i diodi *a punta di contatto*. Essi

sono costituiti (fig. 93.7) da un blocchetto di cristallo di germanio (o silicio) di tipo n su cui poggia un *baffo di gatto* di oro o di tungsteno; il tutto è racchiuso in un involucro di protezione. Mediante un processo di formazione si determina al contatto punta-cristallo una giunzione p-n che conferisce all'insieme la caratteristica di unidirezionalità come nei diodi a giunzione.

94. – *Limitazioni nell'impiego dei diodi a semiconduttore.*

Per quanto riguarda la conduzione diretta vi è una limitazione nell'uso del diodo a semiconduttore dipendente dall'*intensità di corrente massima* (e quindi dalla potenza massima) che il diodo può sopportare senza eccessivo riscaldamento. In realtà vi è un limite alla temperatura raggiungibile senza danno da parte del diodo (75 °C per i diodi al germanio, 150 °C per i diodi al silicio). È evidente che quanto maggiore è la temperatura ambiente tanto minore potrà essere la sopraelevazione di temperatura dovuta alla potenza dissipata nel diodo e di conseguenza minore dovrà essere l'intensità massima. Per i diodi a forte dissipazione di calore è prevista una superficie piana dell'involucro da mettere in contatto con una piastra metallica di dispersione del calore (fig. 94.1).

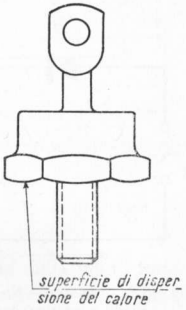


Fig. 94.1 – Diodo a forte dissipazione di calore.

Un'altra limitazione nell'impiego del diodo a semiconduttore deriva dalla *massima tensione inversa* applicabile per una funzionamento normale. Infatti la caratteristica inversa tracciata per valori di tensione inversa piuttosto elevati (fig. 94.2) indica che oltre un certo V_{inM} l'intensità di corrente, prima uguale alla corrente inversa di saturazione, inizia a crescere fino a presentare ad un certo punto un andamento quasi perpendicolare all'asse delle tensioni. In queste condizioni il diodo presenta una resistenza interna differenziale nulla; la tensione V_z a cui ciò si verifica prende il nome di *tensione di Zener*. La spiegazione di questo fenomeno, che nel migliore dei casi toglie al diodo a semiconduttore la caratteristica di unidirezionalità (ma può anche portarlo alla distruzione), si ha pensando che allorchè la tensione inversa è elevata accelera molto gli elettroni portatori di minoranza fino a far loro acquistare una energia sufficiente a rompere i legami covalenti e generare nuove cariche libere. Anche a causa di queste ultime il processo di *ionizzazione a valanga* si

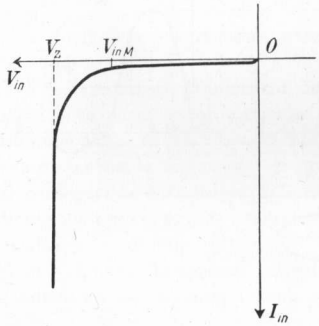


Fig. 94.2 – Caratteristica inversa di un diodo a semiconduttore: tensione di Zener V_z.

esalta senza limite a meno che questo venga imposto dal circuito esterno. Oltre l'effetto valanga si può pure verificare l'*effetto Zener* dovuto al fatto che la forte intensità di campo elettrico nella giunzione rompe direttamente i legami covalenti facendo avvenire la scarica. L'effetto valanga pare più probabile dell'effetto Zener.

Vi sono alcuni diodi detti *diodi Zener* in cui la proprietà precedente, anzichè costituire un inconveniente, viene sfruttata per avere degli stabilizzatori di tensione. Infatti alla tensione Zener la caratteristica di questi diodi si presenta come la parte lineare della caratteristica dei diodi a gas a catodo freddo, anch'essi usati come stabilizzatori di tensione. È da notare che i diodi Zener sono diodi al silicio in quanto con questo semiconduttore si passa quasi bruscamente dalla parte di caratteristica a corrente pressochè costante I_{s0} alla parte di caratteristica a tensione (Zener) costante.

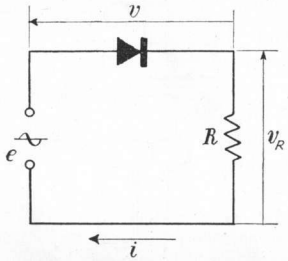


Fig. 95.1 – Circuito raddrizzatore con diodo a semiconduttore.

95. – *Risoluzione grafica di circuiti con diodi a semiconduttore*

Anche ora rimane valido quanto è stato detto nel paragrafo 71 a riguardo della risoluzione grafica di circuiti comprendenti diodi a vuoto. L'unica differenza consiste nel fatto che nel diodo a semiconduttore si ha anche

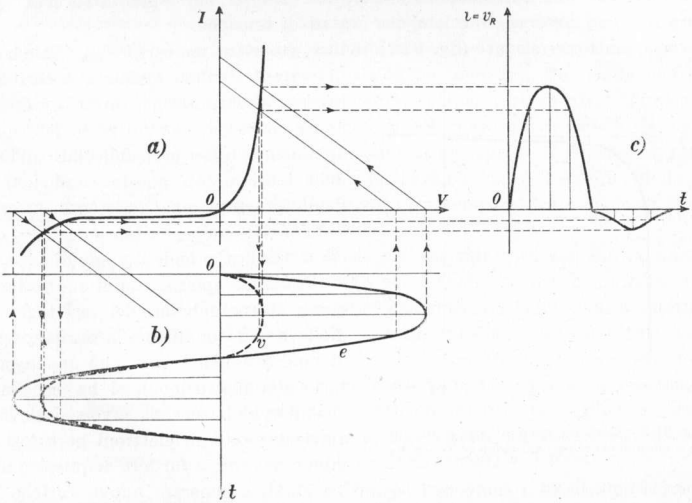


Fig. 95.2 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 95.1.

una piccola conduzione con tensione inversa: per la risoluzione grafica sarà sufficiente far scorrere la retta di carico parallelamente a se stessa anche nel quadrante (V_{in}, I_{in}). In fig. 95.2 è riportata la ricerca grafica (di facile comprensione) delle grandezze interessanti il circuito di fig. 95.1 composto di un diodo a semiconduttore, resistenza di carico R e generatore di tensione alternata.

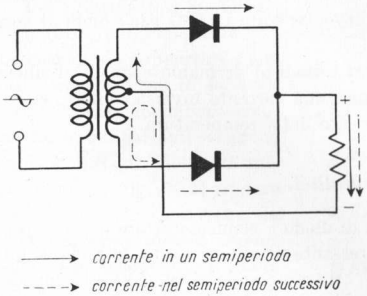


Fig. 95.3 – Raddrizzatore ad onda intera impiegante due diodi a semiconduttore.

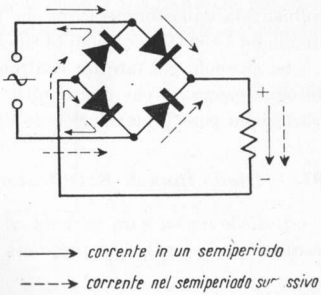


Fig. 95.4 – Ponte di Graetz.

In fig. 95.3 è indicato lo schema di un raddrizzatore ad onda intera impiegante due diodi a semiconduttore, mentre in fig. 95.4 è indicato lo schema di un raddrizzatore a *ponte di Graetz* impiegante quattro diodi.

96. – *Confronto tra i diodi a semiconduttore e i diodi a vuoto.*

I diodi a semiconduttore presentano vantaggi e svantaggi nei confronti dei diodi a vuoto.

Tra i vantaggi è anzitutto da segnalare l'assenza del riscaldamento del catodo che porta ad un aumento del rendimento del raddrizzamento cui contribuisce anche la più bassa caduta interna di tensione nei confronti dei diodi a vuoto. Inoltre le dimensioni di un diodo a semiconduttore sono molto ridotte e di conseguenza è facilitata la loro inserzione nei circuiti. Vantaggi di questi diodi sono pure la grande robustezza meccanica e la lunga durata, l'assenza nella caratteristica di una corrente di lancio ed una bassa resistenza diretta. Per quanto riguarda la capacità interelettrodica presentano vantaggio nei confronti dei diodi a vuoto soltanto i diodi *a punta di contatto* [1] che quindi sono quelli

---

[1] Da quanto è stato detto nei riguardi della larghezza della giunzione dei diodi a giunzione si rileva che la capacità di uno di questi diodi varia aumentando con l'aumento della tensione diretta e diminuendo invece con l'aumento della tensione inversa.

La minore capacità dei diodi *a punta di contatto* deriva dalla minore superficie impegnata nella giunzione.

indicati per l'impiego in alta frequenza (la capacità può scendere a valori inferiori al decimo di pF).

Tra gli svantaggi dei diodi a semiconduttore occorre tener presente la limitata resistenza inversa e la massima tensione inversa ammissibile (che nei diodi al germanio è dell'ordine del centinaio di V e nei diodi al silicio è inferiore al migliaio di V). Inoltre la caratteristica dei diodi a semiconduttore è fortemente influenzata dalla temperatura che non deve superare i 75 °C per i diodi al germanio ed i 150 °C per quelli al silicio.

Se si vuole poi fare un confronto tra i diodi al germanio e quelli al silicio bisogna osservare che questi ultimi hanno una corrente inversa minore, la cui variazione però è maggiormente dipendente dalla temperatura.

97. – *Diodo tunnel. Rettificatori metallici.*

Il *diodo tunnel* è un particolare tipo di diodo a semiconduttore a forte percentuale di impurità. La proprietà interessante di questo diodo, feconda di numerose applicazioni, è che la sua caratteristica (fig. 97.1) presenta nelle vicinanze dello zero un tratto a resistenza differenziale negativa. È in questo tratto che viene fatto lavorare il diodo tunnel, mentre per tensioni più elevate la sua caratteristica non differisce da quella di un normale diodo a semiconduttore

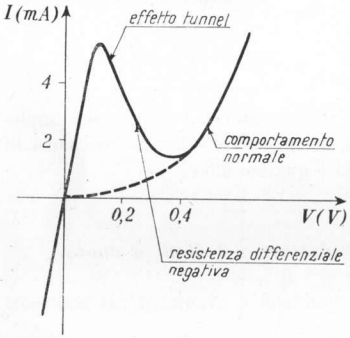


Fig. 97.1 – Caratteristica di un diodo tunnel.

A conclusione di questa parte riguardante i diodi a semiconduttore è opportuno accennare ad alcuni tipi di rettificatori metallici che con quelli si spartiscono il campo di applicazione.

Un primo tipo è quello costituito da un elettrodo di nikel ed un elettrodo di rame tra i quali si è formata una pellicola di ossidulo di rame (fig. 97.2). Tra il rame ed il suo ossido si manifesta una barriera di potenziale che consente il

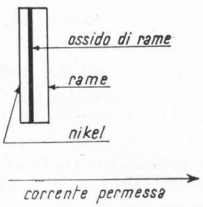


Fig. 97.2 – Rettificatore ad ossido di rame.

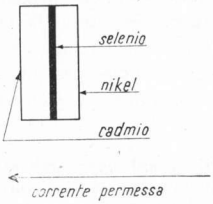


Fig. 97.3 – Rettificatore al selenio.

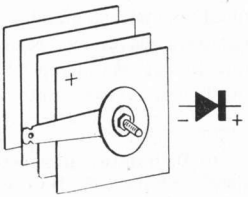


Fig. 97.4 – Serie di rettificatori metallici con alette di raffreddamento

passaggio di corrente nel senso (convenzionale) ossidulo-rame mentre lo ostacola (non completamente) nell'altro verso.

Un altro tipo è quello costituito da un elettrodo di nikel ed un elettrodo di cadmio tra i quali è interposto uno strato di selenio (fig. 97.3). La barriera di potenziale si forma tra il cadmio ed il selenio e la conduzione è permessa nel senso selenio-cadmio.

Per i rettificatori metallici vi è un limite nella densità di corrente che possono sopportare (può giungere ad 1A/cm²) e nella massima tensione inversa. Quando la tensione da sopportare è elevata vengono posti in serie diversi elementi che all'occorrenza (forti dissipazioni) vengono pure muniti di alette di raffreddamento (fig. 97.4) oppure posti in scatole metalliche da collegarsi termicamente a superfici che ne disperdano il calore (fig. 97.5). Un inconveniente di questi rettificatori è l'elevata capacità per cui il loro impiego è limitato alle basse frequenze.

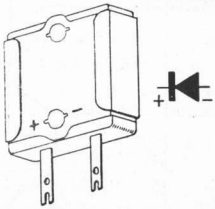


Fig. 97.5 – Rettificatore in scatola metallica.

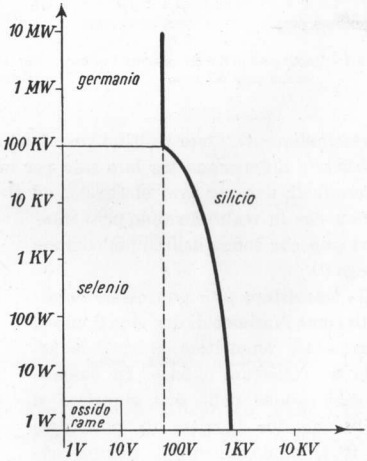


Fig. 97.6 – Campi di conveniente applicazione dei diodi a semiconduttore e dei rettificatori metallici.

Il diagramma di fig. 97.6 pone a confronto i campi di conveniente applicazione dei diodi a semiconduttore e dei rettificatori metallici esaminati in questo capitolo.

98. – *Transistori.*

I *transistori* sono dispositivi a semiconduttore che per quanto di recente ingresso nel campo dell'elettronica hanno avuto una enorme diffusione e si vanno affermando in campi sempre più vasti di applicazione.

Un transistore a giunzione [1] è costituito dall'unione di tre cristalli di semi-

[1] Si trascurano qui i transistori a punte che sono stati i primi ad essere costruiti, ma che ormai presentano soltanto un interesse storico.

conduttore (nella maggior parte dei casi germanio) contenenti alternativamente impurità di tipo diverso. Si hanno così i transistori *pnp* ed i transistori *npn* (fig. 98.1) secondo l'ordine con cui si succedono le impurità nei diversi strati. Da notare che è sempre molto piccolo (frazioni di mm) lo spessore dello strato centrale che prende il nome di *base* e che in esso la concentrazione di impurità è sempre minore della concentrazione di impurità di tipo contrario negli strati adiacenti. Questi ultimi prendono rispettivamente il nome di *emettitore* e *collettore* e differiscono tra loro solo per ragioni costruttive. Il transistore ha tre terminali, uno per ogni elettrodo, ed il suo simbolo è quello indicato in fig. 98.2 che in realtà è valido per i transistori *pnp* che sono quelli di più comune impiego [1].

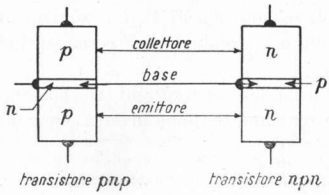


Fig. 98.1 – Costituzione dei transistori a giunzione *pnp* ed *npn*.

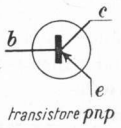


Fig. 98.2 – Simbolo del transistore *pnp*.

Un transistore *pnp* può essere considerato come l'insieme di due giunzioni *pn*, la prima tra emettitore e base, la seconda tra collettore e base. In assenza di polarizzazione nelle due giunzioni si stabiliscono due barriere di potenziale (fig. 98.4) analogamente a quanto avviene nei diodi a giunzione. Nel funzionamento normale la giunzione emettitore-base viene polarizzata in senso diretto mediante un generatore di tensione continua V_B inserito tra emettitore e base (fig. 98.5), mentre la giunzione collettore-base viene polarizzata in senso inverso mediante un generatore di tensione continua V_C, di valore assoluto maggiore di V_B, inserito tra emettitore e collettore. Il collegamento che ne risulta si dice ad *emettitore comune* in quanto questo elet-

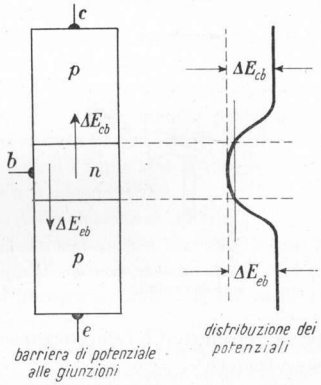


Fig. 98.4 – Distribuzione dei potenziali e relative barriere di potenziale alle giunzioni di un transistore *pnp* non polarizzato.

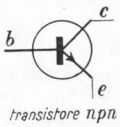


Fig. 98.3 – Simbolo del transistore *npn*.

---

[1] Per i transistori *npn* il simbolo usato è quello di fig. 98.3 che differisce da quello dei transistori *pnp* solo per il verso della freccia relativa all'emettitore. Tutto quanto sarà detto per i transistori *pnp* potrà essere applicato ai transistori *npn* con il solo scambio delle polarità delle tensioni applicate e dei versi delle intensità di corrente.

trodo fa parte sia del circuito base-emettitore (circuito d'ingresso) sia del circuito collettore-emettitore (circuito di uscita) [1]. Le polarizzazioni date agli elettrodi fanno diminuire la barriera di potenziale tra emettitore e base (polarizzazione diretta) ed aumentare la barriera di potenziale tra collettore e base (polarizzazione inversa). Quest'ultima, facendo aumentare la larghezza della giunzione collettore-base, fa pure diminuire lo *spessore equivalente* della base

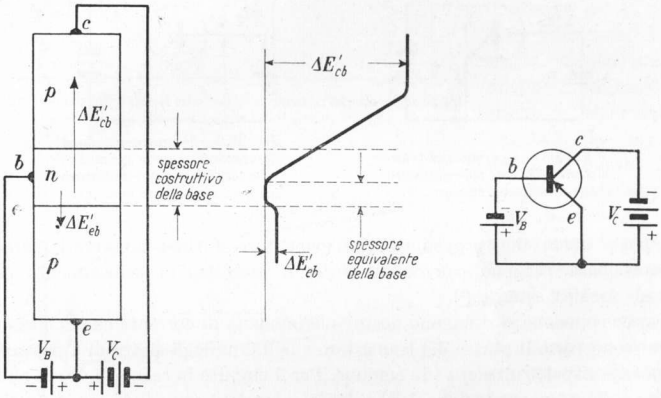
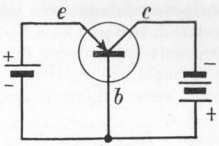


Fig. 98.5 – Collegamento *emettitore comune* e relative polarizzazioni.

che diviene notevolmente inferiore allo spessore costruttivo. Poichè la giunzione emettitore-base si comporta come un diodo polarizzato in senso diretto, attraverso essa si avrà una intensità di corrente diretta nel verso (convenzionale) emettitore-base e composta quasi esclusivamente di buchi (cariche di maggioranza) che dall'emettitore passano nella base [2]. Questi buchi diffondono

---

[1] Il collegamento emettitore comune è quello più impiegato per i transistori. Esistono però altri tipi di collegamento (il cui studio viene rimandato alla parte relativa



98.6 – Collegamento *base comune*.

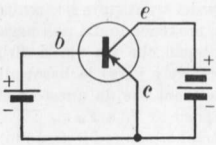


Fig. 98.7 – Collegamento *collettore comune*.

alle applicazioni) e precisamente quello denominato *base comune* (fig. 98.6) e quello denominato *collettore comune* (fig. 98.7).

[2] Gli elettroni che dalla base passano nell'emettitore (e che contribuirebbero anch'essi a formare la corrente di maggioranza) sono relativamente pochi sia a causa dello spessore esiguo della base sia per la bassa concentrazione di impurità in essa presente.

nella base e, dato il piccolo spessore equivalente di questa, la maggior parte riescono a superarla entrando così nel campo d'azione della barriera di potenziale $\Delta E'_{eb}$ che ne favorisce il moto verso il collettore. L'intensità di corrente di collettore I_C (fig. 98.8) sarà quindi leggermente inferiore all'intensità di corrente di emettitore I_E di quella piccola intensità di corrente di base I_B dovuta a

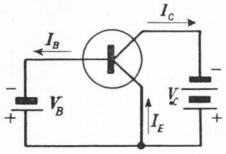


Fig. 98.8 – Correnti nel transistore *pnp* con collegamento emettitore comune.

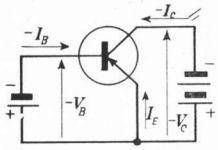


Fig. 98.9 – Rappresentazione convenzionale delle correnti e delle tensioni in un transistore *pnp* ad emettitore comune.

quei pochi buchi che, provenienti dall'emettitore, anzichè superare la barriera collettore-base vengono convogliati verso il morsetto di collegamento della base al circuito esterno (1).

Per convenzione si ritengono positive le intensità di corrente che dall'esterno confluiscono verso il centro del transistore e le d.d.p. degli elettrodi a potenziale più elevato rispetto all'elettrodo comune. Per il circuito in esame si dovrà quindi ricorrere alla rappresentazione delle correnti e tensioni come indicato in fig. 98.9.

99. – *Curve caratteristiche dei transistori.*

Il comportamento di un transistore viene definito dalle sue caratteristiche, ossia dalle relazioni (determinabili sperimentalmente) tra le varie grandezze elettriche che lo interessano e precisamente I_C, I_B, V_C V_B (2).

Una prima caratteristica è quella detta *caratteristica d'uscita* che dà i valori della corrente di collettore I_C in funzione della tensione di collettore V_C

---

(1) Fuori del transistore il circuito esterno si completa mediante una circolazione di elettroni che provenendo dai poli negativi dei generatori di tensione V_C e V_B provvedono a colmare i buchi che via via si dirigono rispettivamente (nell'interno del transistore) verso il collettore e verso la base; alla formazione di buchi nell'emettitore provvedono invece gli elettroni che da questo elettrodo si dirigono verso i morsetti positivi dei generatori di tensione V_C e V_B.

(2) Mentre il triodo (od il pentodo) nella maggior parte dei casi viene fatto funzionare con tensione di griglia negativa e quindi con corrente di griglia nulla e le variazioni dell'intensità di corrente anodica (circuito di uscita) sono comandate dalle variazioni della tensione di griglia (circuito di ingresso), il funzionamento del transistore esige intensità di corrente di base, anzi sono le variazioni di questa (circuito di ingresso) che determinano le variazioni dell'intensità di corrente di collettore (circuito di uscita). Quindi mentre il triodo funziona con un comando di tensione, il transistore funziona con un comando di corrente. Di conseguenza le caratteristiche che occorre conoscere sono più numerose per il transistore che per il triodo (od il pentodo).

per un assegnato valore della intensità di corrente di base I_B. Esisterà così una famiglia di caratteristica di uscita, una per ogni valore della I_B. In fig. 99.1 è riportato lo schema del circuito che serve per il rilievo delle caratteristiche di uscita, mentre una famiglia di tali caratteristiche è riportata in fig. 99.2. Da un primo esame di questa famiglia di caratteristiche si può rilevare che esse sono piuttosto simili alle caratteristiche anodiche di un pentodo anzichè a quelle di un triodo; infatti l'intensità di corrente di collettore I_C è poco variabile al variare della tensione di collettore V_C. Inoltre si può osservare che anche con corrente di base nulla si ha una certa intensità di corrente di collettore che prende il nome di corrente residua I_{C0}; questa corrente è dovuta alle cariche di minoranza che si generano nel transistore a causa della rottura dei legami covalenti per agitazione termica [1]. Conviene subito

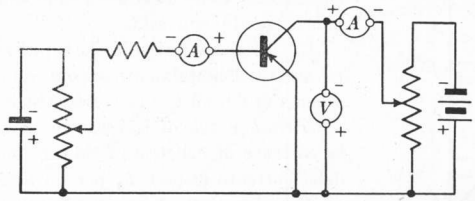


Fig. 99.1 – Circuito per il rilievo delle caratteristiche di uscita e della caratteristica mutua di corrente.

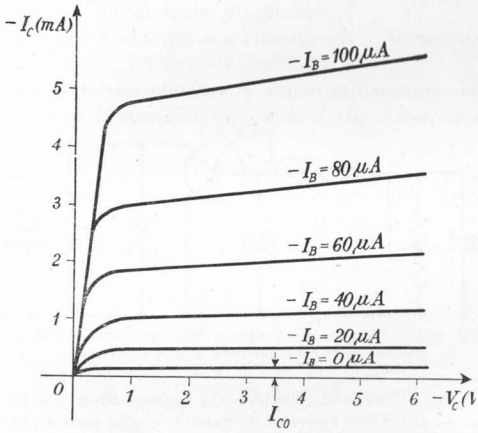


Fig. 99.2 – Famiglia di caratteristiche di uscita.

[1] La corrente residua I_{C0} è una funzione della corrente inversa di saturazione I_{s0} che si stabilirebbe nella giunzione collettore-base polarizzata inversamente qualora fosse staccato il collegamento dell'emettitore. Infatti in questo caso (fig. 99.3) si avrebbe la I_{s0} diretta nel verso (convenzionale) base-collettore. Collegando l'emettitore (fig. 99.4) oltre la I_{s0}

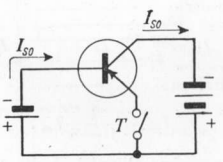


Fig. 99.3 – Transistore ad emettitore comune con emettitore staccato: è unicamente presente la corrente inversa di saturazione del diodo collettore-base.

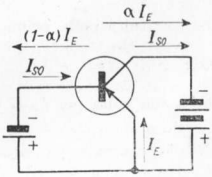


Fig. 99.4 – Componenti delle correnti di base e di collettore.

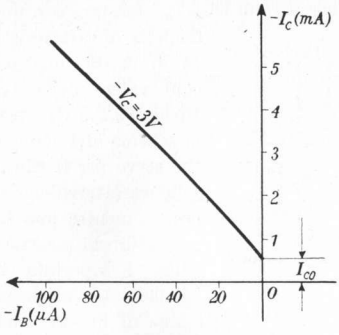


Fig. 99.5 – Caratteristica mutua di corrente.

notare che la corrente residua è funzione della temperatura ed aumenta notevolmente con essa.

Un'altra caratteristica, che si può ricavare sperimentalmente ancora con lo schema di fig. 99.1, è la cosiddetta *caratteristica mutua di corrente* che pone la corrente di collettore I_C in funzione della corrente di base I_B per un assegnato valore della tensione di collettore V_C (1). Una caratteristica mutua di corrente è rappresentata in fig. 99.5. L'intensità di corrente di collettore corrispondente a corrente di base nulla è la corrente residua I_{C0}. In genere è sufficiente conoscere una sola caratteristica mutua di corrente essendo le altre presso a poco coincidenti con questa, per lo meno per tensione di collettore superiore ad un certo valore minimo che è quello per cui si ha il ginocchio nelle caratteristiche di uscita prima considerate.

Prende il nome di *caratteristica di ingresso* quella che pone l'inten-

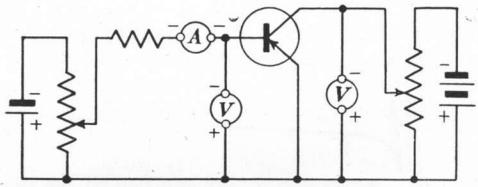


Fig. 99.6 – Circuito per il rilievo delle caratteristiche di ingresso e delle caratteristiche mutue di tensione.

---

si ha la I_E di cui una frazione α diviene corrente di collettore αI_E aggiungendosi alla I_{s0}, mentre la frazione rimanente $(1-\alpha)$ diviene corrente di base $(1-\alpha)I_E$ sottraendosi alla I_{s0}. Si ha quindi:

99.1
$$I_C = \alpha I_E + I_{s0}$$
$$I_B = (1-\alpha)I_E - I_{s0}\,.$$

Dalla seconda delle 99.1 si può ricavare:

$$I_E = \frac{I_B + I_{s0}}{1-\alpha}$$

che sostituita nella prima fornisce:

99.2
$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{1}{1-\alpha} I_{s0}$$

che a sua volta per $I_B = 0$ diviene:

99.3
$$I_{C0} = \frac{1}{1-\alpha} I_{s0}\,.$$

Essendo α un numero molto prossimo all'unità risulta $I_{C0} \gg I_{s0}$ per cui le piccole variazioni di I_{s0} si ripercuotono ingrandite sulla I_{C0}.

(1) Questa caratteristica può essere ricavata dalla famiglia delle caratteristiche di uscita con lo stesso procedimento con cui dalla famiglia delle caratteristiche anodiche di un triodo si ricava una sua caratteristica mutua.

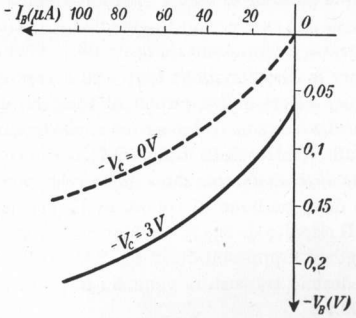


Fig. 99.7 – Caratteristiche di ingresso.

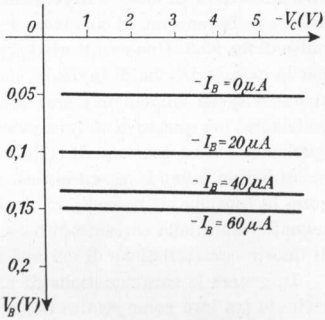


Fig. 99.8 – Famiglia di caratteristiche mutue di tensione.

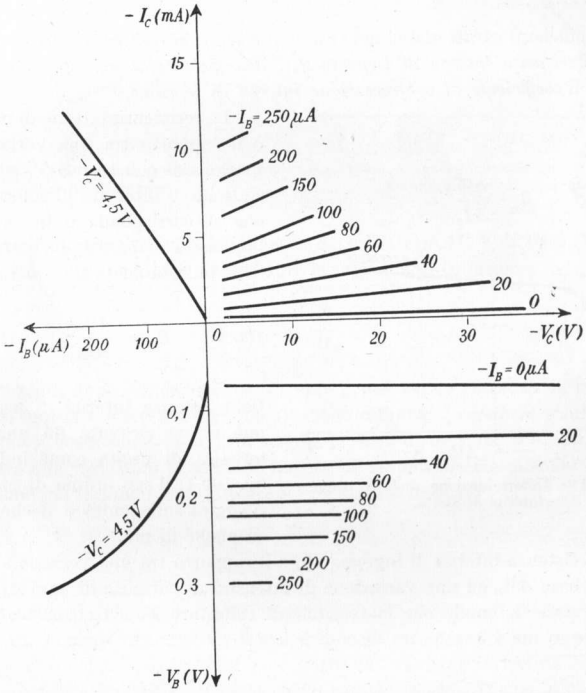


Fig. 99.9 – Caratteristiche di un transistore con collegamento emettitore comune.

sità di corrente di base I_B in relazione con la tensione di base V_B per un assegnato valore della tensione di collettore V_C. Essa può essere rilevata mediante il circuito di fig. 99.6. Una caratteristica di ingresso è rappresentata in fig. 99.7. Anche per le caratteristiche di ingresso, come per le caratteristiche mutue di corrente, si ha la quasi coincidenza tranne che per valori molto piccoli di tensione di collettore; per questo di solito ne viene fornita una sola o al massimo anche quella corrispondente a tensione di collettore nulla (tratteggiata in fig. 99.7).

Si hanno infine le *caratteristiche mutue di tensione* che sono quelle che pongono la tensione di base V_B in funzione della tensione di collettore V_C per assegnati valori della corrente di base I_B. Il circuito di fig. 99.6 è idoneo al rilievo di queste caratteristiche di cui una famiglia è rappresentata in fig. 99.8 (1).

In genere le caratteristiche di un medesimo transistore vengono fornite avvicinate tra loro come risulta dalla fig. 99.9.

100. – *Coefficienti caratteristici del transistore.*

I coefficienti caratteristici del transistore sono: la *resistenza interna di uscita* R_{ou}, la *resistenza interna di ingresso* R_{0i}, il *coefficiente di amplificazione di corrente* β, il *coefficiente di controreazione interna di tensione* γ.

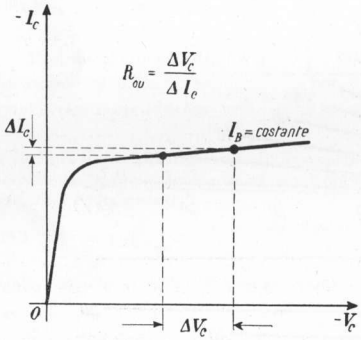


Fig. 100.1 – Determinazione della resistenza interna di uscita.

La resistenza interna di uscita R_{ou} è il rapporto tra una variazione di tensione di collettore ΔV_C ed una variazione di intensità di collettore ΔI_C che si corrispondano in modo che l'intensità di base I_B sia costante (sia cioè nulla la sua variazione ΔI_B):

$$R_{ou} = \frac{\Delta V_C}{\Delta I_C} \qquad (\Delta I_B = 0)\,. \tag{100.1}$$

La resistenza interna di uscita R_{0u} può essere ricavata da una caratteristica di uscita come indicato in fig. 100.1; il suo ordine di grandezza si aggira sulle unità e decine di $k\Omega$ od anche di più.

La resistenza interna di ingresso R_{0i} è il rapporto tra una variazione di tensione di base ΔV_B ed una variazione di intensità di corrente di base ΔI_B che si corrispondano in modo che la tensione di collettore V_C sia costante (sia cioè

(1) Le caratteristiche di ingresso potrebbero essere ricavate graficamente dalle caratteristiche mutue di tensione.

nulla la sua variazione ΔV_c):

100.2 $$R_{0i} = \frac{\Delta V_B}{\Delta I_B} \qquad (\Delta V_c = 0)\,.$$

La resistenza interna di ingresso può essere ricavata da una caratteristica di ingresso come indicato in fig. 100.2; il suo ordine di grandezza si aggira sulle centinaia e migliaia di Ω.

Il coefficiente di amplificazione di corrente β è il rapporto tra due variazioni

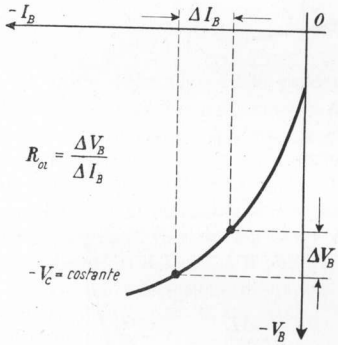


Fig. 100.2 – Determinazione della resistenza interna di ingresso.

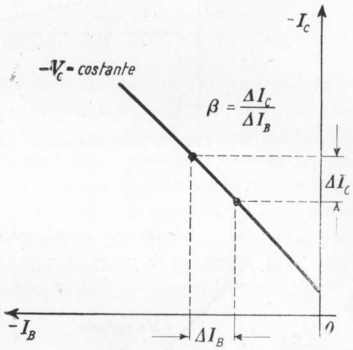


Fig. 100.3 – Determinazione del coefficiente di amplificazione di corrente.

di intensità di corrente rispettivamente di collettore ΔI_c e di base ΔI_B che si corrispondano in modo che sia costante la tensione di collettore:

100.3 $$\beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_B} \qquad (\Delta V_c = 0)\,.$$

Il coefficiente di amplificazione di corrente β può essere ricavato da una caratteristica mutua di corrente (fig. 100.3); il suo ordine di grandezza è sulle decine.

Infine il coefficiente di controreazione interna di tensione γ è dato dal rapporto tra due variazioni di tensione rispettivamente di base e di collettore che si corrispondano in modo che sia costante l'intensità di base:

100.4 $$\gamma = \frac{\Delta V_B}{\Delta V_c} \qquad (\Delta I_B = 0)\,.$$

Il coefficiente di controreazione interna di tensione γ si ricava dalle caratteristiche mutue di tensione (fig. 100.4); il suo ordine di grandezza è sui decimillesimi.

I quattro coefficienti indicati sono quelli che vengono forniti dai costruttori e che possono essere ricavati dalle curve caratteristiche. Si può anche definire un altro coefficiente: la pendenza S, intesa come il rapporto tra una variazione

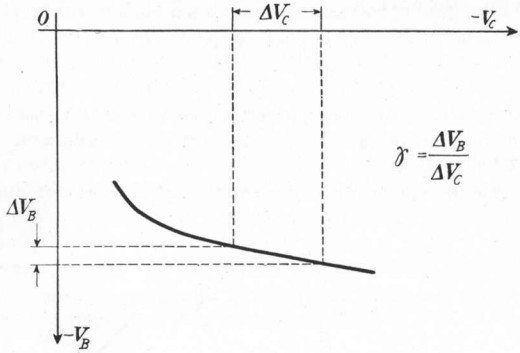


Fig. 100.4 – Determinazione del coefficiente di controreazione interna di tensione.

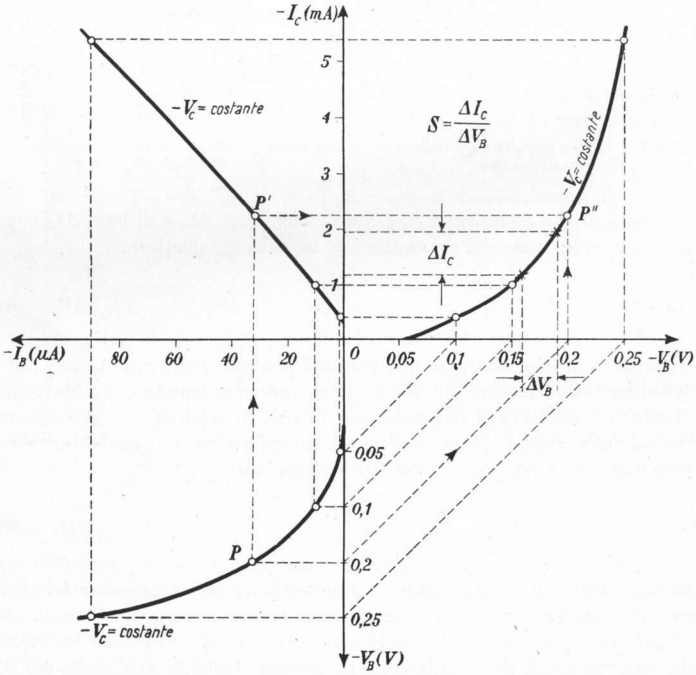


Fig. 100.5 – Caratteristica corrente di uscita-tensione di ingresso.

di corrente di collettore ΔI_C e la variazione di tensione di base ΔV_B che si corrispondano in modo che sia costante la tensione di collettore:

100.5 $$S = \frac{\Delta I_C}{\Delta V_B} \qquad (\Delta V_C = 0)\,.$$

Si constata facilmente che la pendenza S può essere ottenuta facendo il rapporto tra il coefficiente di amplificazione di corrente β e la resistenza interna di ingresso R_{0i}:

100.6 $$S = \frac{\beta}{R_{0i}}\,.$$

L'ordine di grandezza della pendenza S è delle decine di mA/V: essa potrebbe anche determinarsi come pendenza della caratteristica $(-I_C, -V_B)$ che ordinariamente non viene fornita, ma che si può ricavare abbastanza facilmente dalla caratteristica d'ingresso e dalla caratteristica mutua di corrente. La costruzione relativa è indicata in fig. 100.5; ad esempio, preso un punto P sulla caratteristica di ingresso s'innalza una verticale fino ad intersecare la caratteristica mutua di corrente nel punto P'. Tracciando quindi una orizzontale passante per P' si determina il punto P'' che appartiene alla caratteristica $(-I_C, -V_B)$ come intersezione di questa orizzontale con la verticale di ascissa V_B corrispondente a P.

101. - *Risoluzione grafica di circuiti con transistori.*

Il più semplice circuito che impieghi un transistore come amplificatore è quello rappresentato in fig. 101.1. In esso oltre le sorgenti di f.e.m. continua V_{BB} e V_{CC} sono presenti la sorgente del segnale v_e e la cosiddetta *resistenza d'attacco* R_a nel circuito di base (ingresso) e la *resistenza di carico* R nel circuito di collettore (uscita). Le sorgenti di f.e.m. continua servono per polarizzare opportunamente la base ed il collettore rispetto all'emettitore; la resistenza di carico R rende possibili le variazioni di tensione al collettore che costituiscono il segnale in uscita. La resistenza di attacco R_a rappresenta la resistenza complessiva presente esternamente al transistore tra emettitore e base [1].

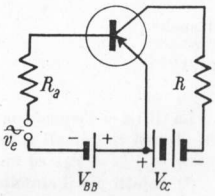


Fig. 101.1 - Semplice circuito amplificatore con transistore.

Per determinare il punto di funzionamento del transistore (tensione di collettore a riposo V_{0C}, intensità di corrente di collet-

[1] La resistenza R_a di opportuno valore viene appositamente inserita nel circuito di ingresso, oltre che per ottenere una assegnata intensità di corrente di base, per linearizzare il funzionamento del transistore come si vedrà in seguito.

tore a riposo I_{0C} (1), intensità di corrente di base a riposo I_{0B}, tensione di base a riposo V_{0B}) bisogna ricorrere allo schema di fig. 101.2 che tiene conto unicamente delle componenti continue. Inoltre è necessario avere a disposizione le caratteristiche del transistore. A differenza di quanto succede per il triodo (funzionante senza intensità di corrente di griglia) per il quale sono sufficienti le caratteristiche anodiche ed eventualmente le caratteristiche mutue, per il transistore si devono usare sia le caratteristiche di uscita sia le caratteristiche mutue di corrente sia le caratteristiche di ingresso. Siano date queste caratteristiche (fig. 101.3). Sul piano delle caratteristiche di uscita si tracci la retta di carico la quale deve intersecare l'asse $-V_C$ nel punto V_{CC} e l'asse $-I_C$ nel punto V_{CC}/R (2). Il punto di funzionamento si troverà su questa retta di carico nell'intersezione della caratteristica tracciata per una intensità di base pari all'intensità di riposo $-I_{0B}$. Per determinare quest'ultima occorre tracciare la *retta d'attacco* sul piano delle caratteristiche d'ingresso (in realtà si usa una sola caratteristica dato che quelle che interessano sono ordinariamente presso a poco coincidenti). La retta d'attacco interseca l'asse $-V_B$ nel punto V_{BB} e l'asse $-I_B$ nel punto V_{BB}/R_a(3). L'incontro della retta di carico con la caratteristica di ingresso fornisce i valori di $-V_{0B}$ e $-I_{0B}$. Sulla caratteristica mutua di corrente (4) dalla conoscenza di $-I_{0B}$ si ricava facilmente $-I_{0C}$ che riportata sulla retta di carico determina il punto di funzionamento.

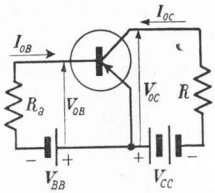


Fig. 101.2 – Circuito equivalente a quello di fig. 101.1 per le sole componenti continue.

---

(1) Si ponga attenzione a non confondere l'intensità di corrente di collettore di riposo I_{0C} con l'intensità di corrente residua I_{C0} che ha tutt'altro significato.

(2) Infatti per il circuito di collettore di fig. 101.2 si può scrivere:

$$-V_{CC} = V_{0C} + RI_{0C}$$

ed anche

101.2 $$-I_{0C} = \frac{V_{CC} - (-V_{0C})}{R}.$$

La 101.2 è l'equazione di una retta (variabili $-I_{0C}$ e $-V_{0C}$) le cui intersezioni con gli assi coordinati si trovano imponendo l'annullarsi una volta di $-I_{0C}$ da cui si ricava $-V_{0C} = V_{CC}$ ed una volta di $-V_{0C}$ da cui si ricava $-I_{0C} = V_{CC}/R$.

(3) Infatti per il circuito di base di fig. 101.2 si può scrivere:

101.3 $$-V_{BB} = V_{0B} + R_aI_{0B}$$

ed anche

101.4 $$-I_{0B} = \frac{V_{BB} - (-V_{0B})}{R_a},$$

da cui con osservazioni analoghe a quelle della nota precedente si trova che le intersezioni della retta d'attacco con gli assi coordinati sono appunto quelle indicate.

(4) Per l'esattezza la caratteristica mutua di corrente usata dovrebbe essere una caratteristica mutua dinamica ricavata cioè punto per punto dalla retta di carico. In

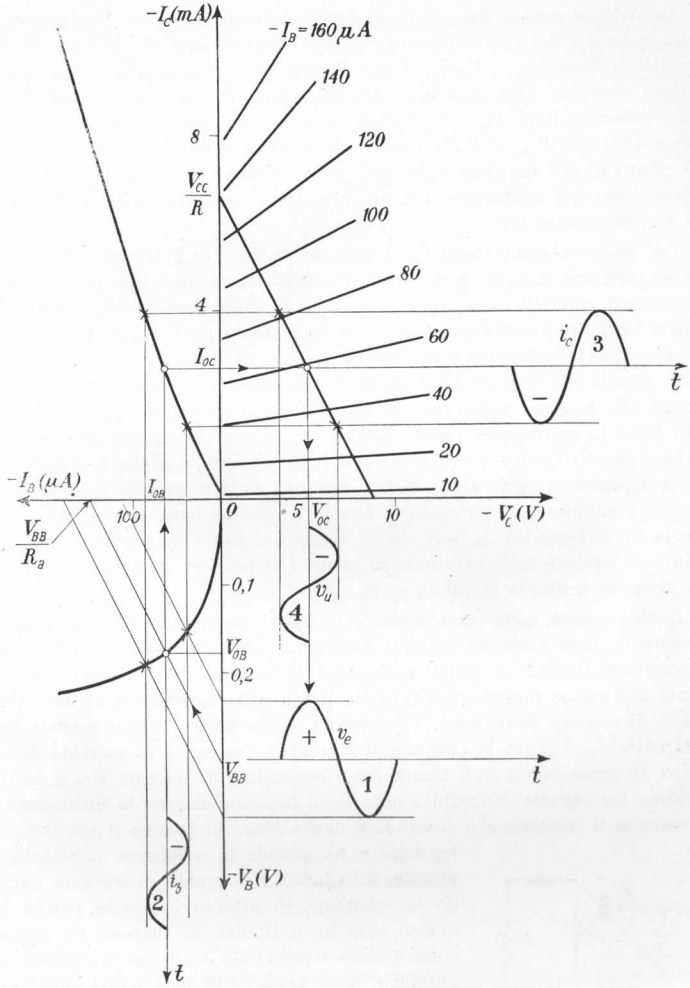


Fig. 101.3 – Risoluzione grafica del circuito di fig. 101.1.

---

realtà dato l'andamento pressochè orizzontale delle caratteristiche di uscita non si commette errore apprezzabile se invece della caratteristica mutua dinamica si usa quella statica nella quale d'altra parte coincidono le varie caratteristiche statiche (la medesima cosa avviene per il pentodo le cui caratteristiche anodiche hanno un andamento simile alle caratteristiche di uscita del transistore).

La determinazione del punto di funzionamento permette di calcolare le potenze fornite dai generatori di f.e.m. continua presenti rispettivamente nel circuito di base $P_{BB} = V_{BB}I_{0B}$ e nel circuito di collettore $P_{CC} = V_{CC}I_{0C}$, le potenze dissipate sulla giunzione emettitore-base $P_{0B} = V_{0B}I_{0B}$ e sulla giunzione collettore-base $P_{0C} = V_{0C}I_{0C}$ ed infine le potenze dissipate nella resistenza d'attacco $P_{0R_a} = R_a I_{0B}^2$ e nella resistenza di carico $P_{0R} = RI_{0C}^2$. Inoltre dal punto di funzionamento possono essere ricavati i valori dei coefficienti caratteristici del transistore utili in uno studio analitico (quando possibile) del suo funzionamento.

Per risolvere completamente il circuito di fig. 101.1 bisogna studiare il regime dinamico determinando qual'è l'andamento in un intero periodo delle componenti variabili della corrente di base i_b, della corrente di collettore i_c e della tensione di collettore v_u la quale rappresenta pure il segnale di uscita. Per fare queste determinazioni basterà ripetere istante per istante le costruzioni eseguite per la ricerca del punto di funzionamento, dando però nel caso attuale alla tensione totale del circuito di base il valore $-V_{BB} + v_e$. In figura 101.3 la costruzione è stata eseguita in corrispondenza del massimo positivo e negativo della v_e. Si noti come la tensione di ingresso v_e e quella di uscita v_u siano in opposizione di fase tra loro. Infatti quando v_e è positiva, facendo diminuire la polarizzazione diretta emettitore-base, fa diminuire l'intensità di corrente sia di base che di collettore. Diminuisce quindi anche la caduta di tensione nella resistenza di carico e la tensione di collettore diviene più negativa tendendo al valore $-V_{CC}$.

Dalla linearità della caratteristica (I_C, I_B) si deduce che se l'intensità di corrente di base varia ad esempio sinusoidalmente, allo stesso modo varia l'intensità di corrente di collettore e quindi la tensione di collettore: non vi è quindi distorsione (deformazione) tra la forma della tensione di uscita e l'intensità di corrente di ingresso. Viceversa la medesima linearità non esiste (caratteristica I_B, V_B) tra la tensione di ingresso e l'intensità di corrente di ingresso. Di conseguenza se il transistore è comandato di corrente non si ha distorsione tra segnale di uscita e segnale di ingresso, mentre la distorsione è presente se il transistore è comandato di tensione. In pratica il comando di tensione si ha quando la resistenza di attacco è piccola; si ha invece il comando di corrente quando la resistenza di attacco è grande perchè in questo caso la resistenza di ingresso del transistore diviene trascurabile e ad una variazione sinusoidale della tensione di base corrisponde una variazione pure sinusoidale dell'intensità di corrente di base.

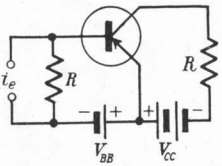


Fig. 101.4 - Circuito amplificatore con transistore comandato da un generatore di corrente.

In fig. 101.4 è rappresentato un transistore nel quale il segnale viene immesso da un generatore di corrente. La soluzione grafica è analoga a quella

rappresentata in fig. 101.3 (1) tranne che ora gli spostamenti della retta di attacco vanno eseguiti secondo la i_e anzichè secondo la v_e. Questa parte di procedimento è indicata in fig. 101.5.

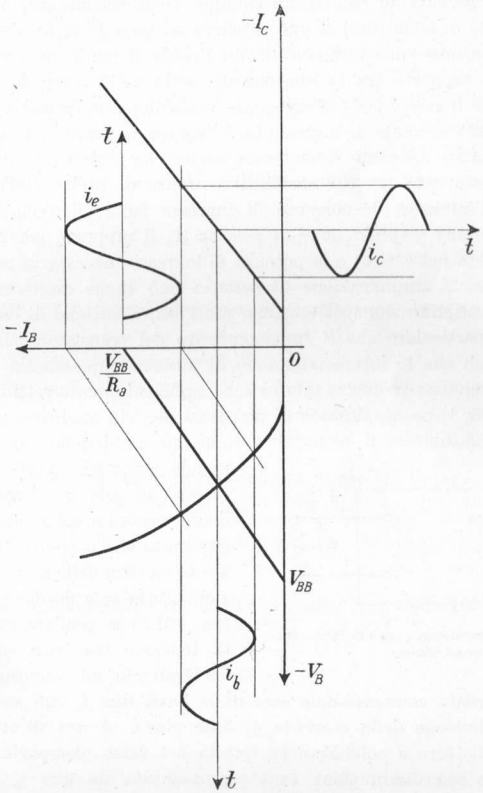


Fig. 101.5 - Risoluzione grafica del circuito di fig. 101.4.

(1) Infatti, a parte il punto di funzionamento in corrente continua che è perfettamente identico a quello trovato per il circuito di fig. 101.1, per le componenti variabili si può scrivere:

101.5 $$i_e = \frac{v_b}{R_a} + i_b$$

in cui v_b indica la componente variabile della tensione di base (presente anche ai capi di R_a) ed i_b la componente variabile della intensità di corrente di base. Per $v_b = 0$ (asse $-I_B$) si ha $i_b = i_e$ cioè lo spostamento della intersezione della retta di attacco sull'asse $-I_B$ equivale proprio istante per istante alla corrente segnale i_e.

102. – *Funzione amplificatrice del transistore.*

Si è visto che applicando un segnale di ingresso v_e al transistore (nel circuito di base nello schema ad emettitore comune finora esaminato) nel circuito di uscita (circuito di collettore) si può ottenere un segnale v_u fornito dalla variazione della tensione collettore-emettitore. Prende il nome di *amplificazione di tensione* A_v il rapporto tra la tensione di uscita (sola componente variabile). e la tensione di ingresso (sola componente variabile). Nel transistore data anche la presenza della corrente di ingresso (a differenza di quanto avviene ordinariamente nel triodo) conviene considerare anche l'*amplificazione di corrente* A_i intesa come rapporto tra l'intensità di corrente di uscita (sola componente variabile) e l'intensità di corrente di ingresso (sola componente variabile). Infine si denomina *amplificazione di potenza* A_p il rapporto tra la potenza di uscita (utilizzata nel carico) e la potenza di ingresso (necessaria per il comando del transistore). L'amplificazione di potenza può anche essere ricavata come prodotto dell'amplificazione di tensione per l'amplificazione di corrente.

Nel caso particolare che il funzionamento del transistore sia lineare (sia perchè i segnali che lo interessano sono di piccola ampiezza sia perchè le caratteristiche vengono sfruttate solo in zone sufficientemente rettilinee) la determinazione delle varie amplificazioni può farsi per via analitica. A questo scopo conviene considerare il transistore come un quadripolo (fig. 102.1) assumendo come grandezze che lo interessano le sole componenti variabili delle tensioni e delle correnti. Il verso assegnato alle correnti variabili i_e e i_u è conseguenza delle seguenti considerazioni. Se la v_e è positiva, contribuisce (fig. 101.3) a rendere meno negativa la tensione tra base ed emettitore: ciò equivale ad aggiungere alla I_{0B}, che come corrente convenzionale esce dalla base, una i_e che entra nella base. Una diminuzione della corrente di base porta ad una diminuzione della corrente di collettore e poichè anche questa nel verso convenzionale esce dal collettore, una sua diminuzione sarà rappresentata da una i_u entrante nel collettore.

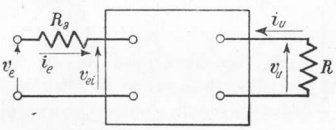


Fig. 102.1 – Transistore considerato come quadripolo.

Indicando con v_{ei} la tensione di ingresso al transistore (dopo la resistenza di attacco R_a) riesce utile scrivere le due equazioni del quadripolo di fig. 102.1 esprimendo la tensione v_{ei} e la corrente di uscita i_u in funzione della corrente di entrata i_e e della tensione di uscita v_u:

$$\begin{aligned} v_{ei} &= h_{11} i_e + h_{12} v_u \\ i_u &= h_{21} i_e + h_{22} v_u \,. \end{aligned} \tag{102.1}$$

I coefficienti h_{11}, h_{12}, h_{21} ed h_{22} che intervengono nelle relazioni precedenti vengono detti *parametri ibridi*. Tenendo presente che v_{ei}, i_e, v_u ed i_u sono le

variazioni delle grandezze che interessano il transistore è facile dedurre (per quanto visto al paragrafo 100) che i parametri ibridi corrispondono ai coefficienti caratteristici del transistore, essendo precisamente:

102.2

$$h_{11} = \frac{v_{ei}}{i_e}\,(v_u = 0) \quad \text{e quindi} \quad h_{11} = R_{0i}$$

$$h_{12} = \frac{v_{ei}}{v_u}\,(i_e = 0) \quad \text{e quindi} \quad h_{12} = \gamma$$

$$h_{21} = \frac{i_u}{i_e}\,(v_u = 0) \quad \text{e quindi} \quad h_{21} = \beta$$

$$h_{22} = \frac{i_u}{v_u}\,(i_e = 0) \quad \text{e quindi} \quad h_{22} = \frac{1}{R_{0u}}\,.$$

Sostituendo nelle 102.1 i valori dei parametri ibridi forniti dalle 102.2 si ricava:

102.3

$$v_{ei} = R_{0i} i_e + \gamma v_u$$

$$i_u = \beta i_e + \frac{1}{R_{0u}} v_u\,.$$

Oltre le 102.3 si potrà utilizzare la relazione esistente tra la tensione di uscita e l'intensità di corrente di uscita che, dati i versi di v_u e i_u (fig. 102.1), risulta:

102.4

$$v_u = - R i_u\,.$$

Sostituendo nella seconda delle 102.3 il valore di v_u dato dalla 102.4 si ottiene:

$$i_u = \beta i_e - \frac{R}{R_{0u}} i_u$$

e quindi

$$i_u = \frac{\beta i_e}{1 + \dfrac{R}{R_{0u}}}$$

da cui infine si può ricavare l'amplificazione di corrente:

102.5

$$A_i = \frac{i_u}{i_e} = \frac{\beta}{1 + \dfrac{R}{R_{0u}}}\,.$$

Dalla 102.5 si rileva che l'amplificazione di corrente A_i è tanto minore del coefficiente di amplificazione di corrente β quanto maggiore è la resistenza di carico R nei confronti della resistenza interna di uscita R_{0u}.

Si definisce *resistenza di ingresso* del transistore R_e (fig. 102.2) il rapporto

tra la tensione v_{ei} e l'intensità i_e. Dalla prima delle 102.3 si ricava:

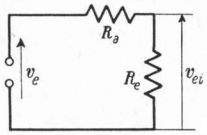


Fig. 102.2 – Circuito equivalente di ingresso.

$$R_e = \frac{v_{ei}}{i_e} = R_{0i} + \gamma \frac{v_u}{i_e} = R_{0i} - \gamma \frac{Ri_u}{i_e}$$

e quindi:

102.6 $$R_e = R_{0i} - \gamma R A_i \, .$$

La resistenza di ingresso è quindi minore della resistenza interna di ingresso.

L'amplificazione di tensione A_v è data dalla espressione:

$$A_v = \frac{v_u}{v_e} = \frac{-Ri_u}{v_{ei}\dfrac{R_a + R_e}{R_e}} = -\frac{Ri_u}{R_e i_e \dfrac{R_a + R_e}{R_e}} = -\frac{R}{(R_a + R_e)}\frac{i_u}{i_e}$$

equivalente alla

102.7 $$A_v = -\frac{R}{R_a + R_e} A_i \, .$$

Il segno negativo che compare nella 102.7 sta ad indicare l'inversione di fase che il transistore opera tra il segnale di ingresso ed il segnale di uscita.

L'amplificazione di potenza A_p risulterà infine:

102.8 $$A_p = A_i A_v = \frac{R}{R_a + R_e} A_i^2 \, .$$

I parametri h (1) del transistore possono essere ricavati dalle caratteristiche del transistore stesso nel punto di funzionamento assegnato. Tuttavia i costruttori di tran-

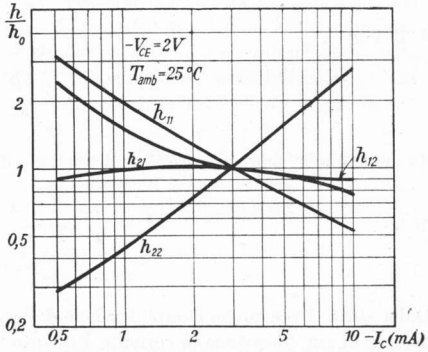


Fig. 102.3 – Variazione dei rapporti adimensionali h/h_0 in funzione della corrente di collettore.

(1) Si noti che i parametri h differiscono secondo il collegamento del transistore. Quelli di cui si parla in questo paragrafo si riferiscono al collegamento emettitore comune. Si parlerà dei parametri relativi agli altri tipi di collegamento allorchè (nella parte dedicata alle applicazioni) questi verranno studiati diffusamente. Si vedrà pure che esistono delle relazioni che permettono di ricavare i parametri h di un particolare tipo di collegamento da quelli relativi ad un altro tipo.

sistori forniscono dei diagrammi che danno le variazioni dei parametri h in funzione della tensione di collettore o della corrente di collettore. E precisamente, indicando con h_0 il valore di un parametro per un dato punto di funzionamento, i diagrammi forniscono l'andamento di h/h_0 potendosi così utilizzare la stessa scala delle ordinate per tutti i parametri. In fig. 102.3 ed in fig. 102.4 sono riportate ad esempio le variazioni dei parametri di un dato transistore in funzione di $-I_C$ e di $-V_C$.

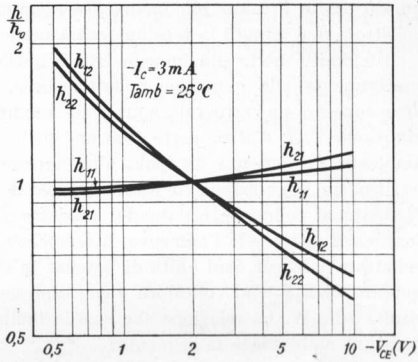


Fig. 102.4 – Variazione dei rapporti adimensionali h/h_0 in funzione della tensione di collettore.

103. – *Limitazioni nell'impiego dei transistori.*

Per non danneggiare il transistore è necessario non superare certi limiti di funzionamento sia nel circuito di ingresso che nel circuito di uscita. Per il circuito di ingresso il limite viene imposto dalla massima corrente di base, dato che la giunzione emettitore-base si comporta in pratica come un diodo polarizzato direttamente. Dalle caratteristiche di ingresso si può rilevare che

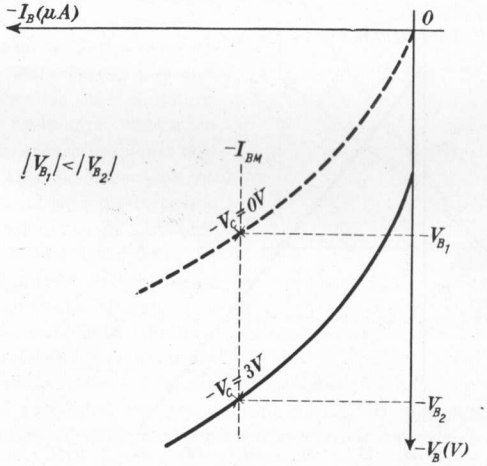


Fig. 103.1 – La corrente di base è maggiore con tensione di collettore nulla.

questo limite è tanto più facilmente raggiungibile qualora venga staccato il collettore o si annulli la tensione collettore-emettitore (fig. 103.1).

Un limite molto più impegnativo è quello relativo al circuito di uscita e precisamente alla giunzione collettore-base. La temperatura di questa non deve superare un certo valore massimo ammissibile T_{gM} . La temperatura della giunzione T_g è d'altra parte funzione delle seguenti grandezze: temperatura ambiente T_a, potenza dissipata alla giunzione collettore-base P_c e *resistenza termica* tra la giunzione collettore-base ed il mezzo circostante K. La potenza dissipata al collettore è data dal prodotto $P_C = V_C I_C$ mentre per resistenza termica K si intende l'aumento di temperatura in °C che subisce la giunzione collettore-base per ogni unità di potenza in essa dissipata; poichè in genere la potenza dissipata al collettore viene espressa in mW l'unità di misura di K risulta °C/mW. La relazione che lega la temperatura della giunzione alla temperatura ambiente è la seguente:

103.1 $$T_g = T_a + KP_C \, .$$

Dalla 103.1 si ricava qual'è la potenza dissipata al collettore P_C che causa la temperatura T_g per una data temperatura ambiente:

103.2 $$P_C = \frac{T_g - T_a}{K} \, .$$

Da quest'ultima relazione si ricava che la massima potenza dissipabile al collettore è una funzione della temperatura ambiente e precisamente decrescente al crescere di quest'ultima, come indicato in fig. 103.2. Per ogni transistore si

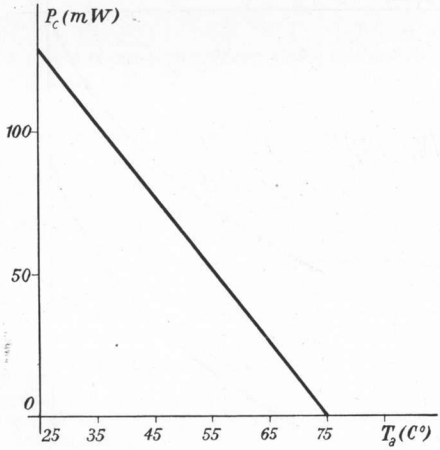


Fig. 103.2 – Variazione della potenza massima dissipabile al collettore in funzione della temperatura ambiente.

potranno tracciare quindi sulle caratteristiche di uscita diverse curve di massima dissipazione al collettore, una per ogni valore della temperatura ambiente (fig. 103.3).

Dalla 103.2 si rileva pure che la potenza massima dissipabile alla giun-

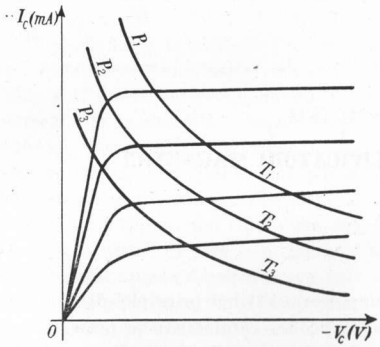


Fig. 103.3 – Curve di massima dissipazione al collettore, valide per valori diversi della temperatura ambiente.

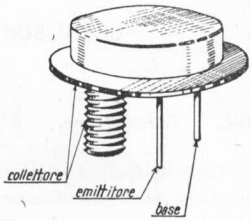


Fig. 103.4 – Transistore di potenza.

zione cresce con il diminuire di K. È per questo motivo che nei transistori di potenza l'involucro esterno, collegato al collettore, viene posto in buon contatto termico con il telaio dell'apparecchio (fig. 103.4): la migliore dispersione di calore permette una maggiore dissipazione di potenza a parità di temperatura ambiente (fig. 103.5).

Occorre infine tener presente che nei transistori si può verificare un grave inconveniente detto della *deriva termica cumulativa* che può portare alla distruzione del transistore. Può avvenire ad esempio che un aumento di temperatura ambiente porti ad un aumento della corrente residua la quale, oltre a produrre uno spostamento del punto di funzionamento con possibile distorsione, determina un aumento della potenza dissipata al collettore. Questa a sua volta provoca un aumento della temperatura del transistore e quindi ancora della corrente residua. Il processo si esalta ed il transistore si rovina. Per evitare questa instabilità termica si usano speciali circuiti stabilizzatori che verranno studiati nel capitolo dedicato alla polarizzazione dei transistori.

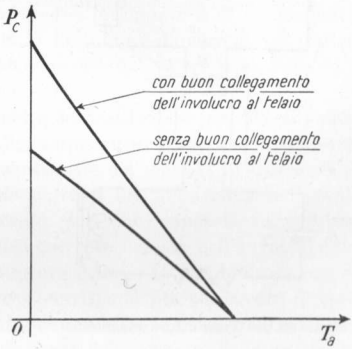


Fig. 103.5 – Una migliore dispersione di calore permette una maggior dissipazione di potenza al collettore a parità di temperatura ambiente.

CAPITOLO XII

CENNI SUGLI AMPLIFICATORI MAGNETICI

104. – *Trasduttore.*

Gli *amplificatori magnetici* sono amplificatori il cui principio di funzionamento si basa sull'utilizzazione delle particolari caratteristiche presentate da alcuni tipi di materiali ferromagnetici; in effetti lo sviluppo degli amplificatori magnetici è avvenuto di pari passo con il miglioramento delle caratteristiche dei materiali ferromagnetici in essi impiegati.

Elemento fondamentale dell'amplificatore magnetico è il *trasduttore* [1]. Esso è costituito da un nucleo di materiale ferromagnetico (fig. 104.1) su cui sono avvolti due avvolgimenti, uno dei quali di N_c spire fa parte del *circuito di controllo* alimentato da una sorgente di f.e.m. continua E_c mentre l'altro di N spire fa parte del *circuito di carico* alimentato da una sorgente di f.e.m. alternata di valore istantaneo e. Del circuito di controllo fanno anche parte una resistenza variabile R_c che ha lo scopo di variare l'intensità di corrente di controllo ed una induttanza di elevato valore L_c che ha lo scopo di bloccare nel circuito di controllo le componenti alternate in esso indotte dal circuito di carico attraverso l'accoppiamento tra gli avvolgimenti N ed N_c. Del circuito di carico fa anche parte la resistenza di carico R.

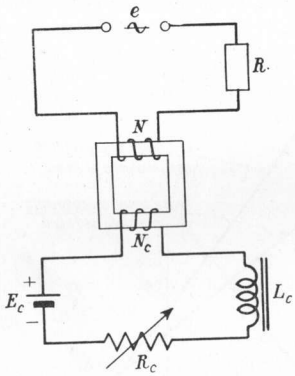


Fig. 104.1 – Trasduttore magnetico.

Per l'esame del funzionamento del trasduttore occorre fare alcune ipotesi (sufficientemente verificate nei materiali usati per gli amplificatori magnetici) circa il ciclo di isteresi del materiale costituente il nucleo del trasduttore. Conviene supporre anzitutto che l'area del ciclo di isteresi sia trascurabile, inoltre che la permeabilità iniziale (cioè per piccole intensità di campo magnetico) sia molto elevata ed infine che la sa-

---

[1] Il trasduttore rappresenta per l'amplificatore magnetico ciò che il tubo elettronico o il transistore rappresentano per gli amplificatori elettronici.

turazione intervenga in modo netto; fatte queste ipotesi la curva di magnetizzazione del nucleo potrà essere rappresentata da tre tratti rettilinei come indicato in fig. 104.2.

L'intensità di corrente i nel circuito di carico dipenderà dall'impedenza del circuito costituita dalla resistenza di carico R che si suppone costante e dalla reattanza dell'avvolgimento N. Quest'ultima, essendo funzione della permeabilità incrementale del nucleo di materiale ferromagnetico, viene a dipendere istante per istante dal punto della curva di magnetizzazione che è interessato e quindi dal valore istantaneo dell'intensità di campo magnetico. Poichè quest'ultima dipende a sua volta dall'intensità di corrente di controllo I_c si deduce che variando questa si può variare l'intensità di carico i. Se, ad esempio, l'intensità di corrente continua del circuito di controllo è tale da far lavorare il materiale ferromagnetico nel punto 1 di fig. 104.2, essendo ivi la permeabilità incrementale massima, l'intensità di corrente di carico risulta piccolissima; se invece l'intensità di corrente continua del circuito di controllo è tale da far lavorare il materiale ferromagnetico nel punto 2 di permeabilità incrementale nulla (in pratica ridottissima) l'intensità di corrente di carico risulterà elevata e dipendente quasi esclusivamente dal valore istantaneo di e e dal valore di R [1].

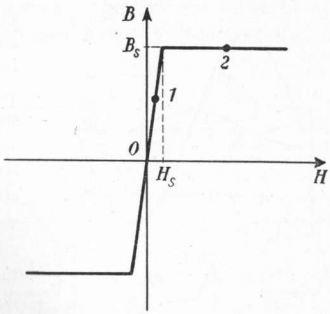


Fig. 104.2 – Curva di magnetizzazione ideale per un trasduttore magnetico.

In fig. 104.3 è illustrato il comportamento del trasduttore per diversi valori della intensità di corrente di controllo I_c, ammesso in ogni caso costante il valor massimo E_M della tensione di alimentazione del circuito di carico. Si è supposta trascurabile la resistenza R nei confronti dell'induttanza dell'avvolgimento N allorchè il nucleo non è saturato. Si è pure supposta trascurabile (per l'elevato valore della L_c) l'intensità di corrente indotta nell'avvolgimento di controllo. In *a*) è rappresentato l'andamento della e; in *b*) è indicata con i_L l'intensità di corrente nel circuito di carico corrispondente a corrente di controllo I_c nulla. Rispetto alla e l'intensità i_L risulta sfasata di un quarto di periodo in ritardo per l'ipotesi fatta in precedenza della esiguità della resistenza nei confronti dell'induttanza dell'avvolgimento N in assenza di saturazione. Si è supposto inoltre che per il valore assegnato di E_M la forza magneto-motrice istantanea massima NI_{LM} sia minore della f.m.m. di saturazione (f.m.m.)$_s$

[1] In realtà la possibilità o meno di saturazione del materiale ferromagnetico dipende anche dal valor massimo E_M della f.e.m. alternata presente nel circuito di carico. Qui si suppone che essa da sola sia insufficiente a saturare il materiale e che invece riesca a portarlo nelle vicinanze della condizione di saturazione.

corrispondente all'intensità di campo H_s che produce la saturazione del nucleo ferromagnetico. Con i_R si è invece indicata l'intensità di corrente che si avrebbe nel carico qualora fosse saturato costantemente il nucleo del trasduttore: essa risulta istantaneamente uguale ad e/R ed in fase con e. Se all'intensità di corrente di controllo si dà un valore I_1 tale che la f.m.m. prodotta congiuntamente dagli avvolgimenti N ed N_c superi all'istante t_1 la $(\text{f.m.m.})_s$, in tale istante la curva della i salta dalla i_L alla i_R (fig. 104.3, *c*) per ritornare alla i_L quando la f.m.m. risultante diviene nuovamente inferiore alla $(\text{f.m.m.})_s$. Le curve *c*), *d*) ed *e*) della fig. 104.3 corrispondono a valori crescenti della intensità di corrente di controllo. Si nota come il valor medio ed il valor efficace della intensità di corrente nel carico vadano aumentando con l'aumentare della I_c. Variando l'ampiezza della I_c si può quindi regolare la potenza utilizzata nella resistenza di carico R. Anzi, se si dimensionano opportunamente i circuiti del trasduttore si può fare in modo che ad una piccola corrente di controllo I_c corrisponda un valore efficace relativamente grande dell'intensità di corrente di carico I; si sarà ottenuta una amplificazione. Si ricorre in tal caso al termine *amplificazione di potenza* A_p intendendosi con essa il rapporto tra la potenza utilizzata nel carico R e la potenza dissipata nel circuito di controllo. Risulta evidentemente:

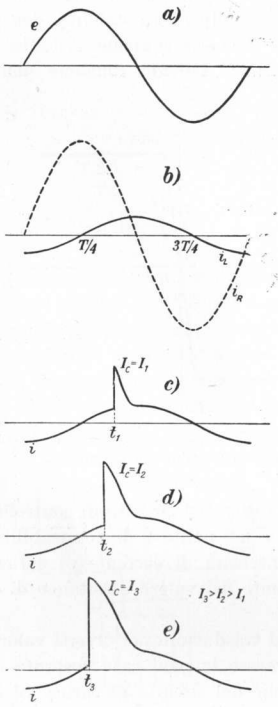


Fig. 104.3 – Comportamento del trasduttore magnetico per diversi valori della intensità di corrente di controllo.

104.1 $$A_p = \frac{RI^2}{R_c I_c^2}$$

in cui R_c rappresenta la resistenza complessiva del circuito di controllo. Si ottengono con tale sistema amplificazioni che possono variare dalle decine fino al centinaio.

Nel trasduttore precedentemente considerato (fig. 104.1) l'induttanza L_c ha lo scopo di evitare correnti indotte nel circuito di controllo dall'avvolgimento N percorso dalla corrente di carico di intensità variabile. Si raggiunge meglio lo scopo eliminando l'induttanza L_c ed usando una coppia di trasduttori nei quali gli avvolgimenti del circuito di carico sono disposti in modo che le due f.e.m. indotte negli avvolgimenti di controllo siano esattamente uguali ed in opposizione tra loro, annullandosi a vicenda. Se poi si desidera che nel carico la corrente sia continua è necessario disporre di opportuni raddrizzatori.

Altri elementi di circuito si aggiungono poi ai trasduttori se si vogliono ottenere particolari requisiti o valori elevati di amplificazione. L'insieme dei trasduttori e dei vari circuiti ed elementi connessi costituisce un amplificatore magnetico.

105. *Amplicatore magnetico.*

Il circuito più semplice di un amplificatore magnetico che impieghi due trasduttori è quello indicato in fig. 105.1. Si noti in esso il senso contrario dei due avvolgimenti N del circuito di carico. Si ritengano ancora valide le ipotesi fatte nel paragrafo precedente nei riguardi di R e si considerino esattamente uguali i due avvolgimenti di un medesimo circuito (controllo o carico). Si ritenga inoltre piuttosto bassa la resistenza R_c del circuito di controllo.

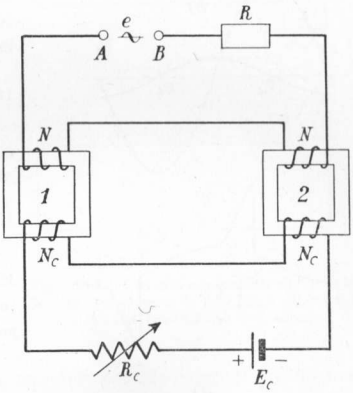


Fig. 105.1 – Semplice circuito di un amplificatore magnetico con due trasduttori.

In fig. 105.2, *a*) è rappresentata la f.e.m. e agente nel circuito di carico. In fig. 105.2, *b*) sono invece rappresentate i_L ed i_R che sono le correnti che si stabilirebbero nel circuito di carico con i nuclei rispettivamente non saturati e saturati. Il circuito di controllo sia ora percorso dalla corrente di intensità i_c . Essendo $N_c i_c$ la f.m.m. dovuta alla corrente di controllo in entrambi gli avvolgimenti N_c, le f.m.m. interessanti i nuclei 1 e 2 saranno rispettivamente (in assenza di saturazione)

$$F_1 = N_c i_c + N i_L$$

e

$$F_2 = N_c i_c - N i_L$$

ritenendo i_L positiva se nel circuito di carico va da A a B esternamente al generatore (da $T/4$ a $3T/4$). Dall'istante $T/4$ in poi va aumentando la F_1 che interessa il trasduttore 1, mentre va diminuendo la F_2 che interessa il trasduttore 2. Se all'istante t_1 la F_1 supera la (f.m.m.)$_s$ il nucleo del trasduttore 1 si satura per cui si annulla (o quasi) l'induttanza dell'avvolgimento N del trasduttore 1. In conseguenza di ciò nell'avvolgimento N_c del trasduttore 1 non si avrà nessuna f.e.m. indotta, mentre risulterà non compensata quella che si produce nell'avvolgimento N_c del trasduttore 2. Il trasduttore 2 non è saturato, tuttavia l'induttanza equivalente del suo avvolgimento N (che è l'induttanza vista dal generatore di f.e.m. e) si annulla a causa dell'accoppiamento con l'avvolgimento N_c corrispondente. Difatti per quanto riguarda le componenti alternate il

circuito equivalente dell'amplificatore magnetico attuale (con il nucleo 1 saturo) risulta quello indicato in fig. 105.3 per il quale valgono le relazioni:

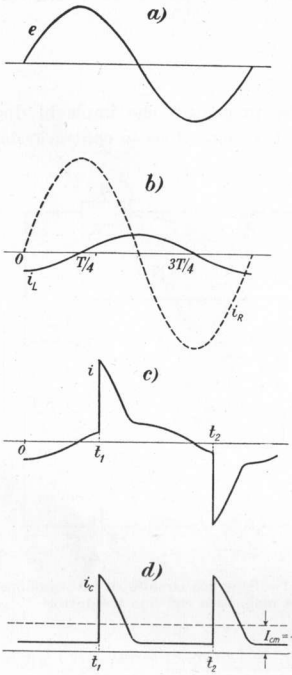


Fig. 105.2 – Comportamento dell'amplificatore magnetico di fig. 105.1.

$$e = Ri + L_N \frac{di}{dt} + M \frac{di_c}{dt}$$

105.1

$$0 = R_c i_c + L_{Nc} \frac{di_c}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

in cui L_N ed L_{Nc} rappresentano le induttanze degli avvolgimenti N ed N_c. Dalla seconda delle 105.1 ritenendo trascurabile la R_c si ricava:

105.2 $$\frac{di_c}{dt} = -\frac{M}{L_{Nc}} \frac{di}{dt}$$

che sostituito nella prima delle 105.1 fornisce:

105.3 $$e = Ri + \left(L_N - \frac{M^2}{L_{Nc}}\right) \frac{di}{dt} .$$

Ricordando ora che è $M = k\sqrt{L_N L_{Nc}}$ e ritenendo k di valore prossimo all'unità risulta

$$\frac{M^2}{L_{Nc}} \simeq \frac{L_N L_{Nc}}{L_{Nc}} = L_N$$

per cui:

105.4 $$L_N - \frac{M^2}{L_{Nc}} \simeq 0 .$$

La 105.3 si semplifica quindi nella

105.5 $$e = Ri$$

dalla quale si deduce che la corrente nel circuito di carico dipende solo da e e da R.

In fig. 105.2 *c*) all'istante t_1 è indicato il passaggio della i dal valore i_L al valore i_R. La i passa di nuovo al valore i_L allorchè cessa la saturazione del trasduttore 1. Dopo l'istante $3T/4$ la f.m.m. Ni e la f.m.m. $N_c i_c$ risultano concordi nel trasduttore 2 e discordi nel trasduttore 1. All'istante t_2 nel quale la F_2 supera la (f.m.m.)$_s$ si satura il trasduttore 2 e quindi si ripete (salvo il verso della i) quanto già verificatosi all'istante t_1.

Negli intervalli di tempo in cui l'intensità di carico assume il valore i_R, poichè uno solo dei trasduttori non è saturo, nel circuito di controllo viene a generarsi una corrente indotta che (secondo la 105.2) riproduce l'andamento della corrente di carico; dato però il senso degli avvolgimenti, nel circuito di controllo si determina una corrente pulsante di frequenza doppia della fre-

quenza della tensione di alimentazione del circuito di carico (fig. 105.2, *d*).

È interessante osservare che nel circuito di controllo l'intensità di corrente i_c assume un valor medio che è esattamente uguale a E_c/R_c. Infatti negli intervalli di tempo in cui nessuno dei due nuclei è saturato le due f.e.m. indotte nel circuito di controllo si annullano reciprocamente e quindi è nulla l'intensità di corrente ad esse dovuta. Quando invece uno dei due nuclei è saturato l'altro viene interessato da un flusso che si mantiene costante: ciò si può dedurre dalla 105.3 il cui ultimo termine può essere scritto

$$\left(L_N - \frac{M^2}{L_{Nc}}\right)\frac{di}{dt} = N\frac{d\varphi}{dt};$$

ma poichè il primo membro dell'uguaglianza precedente è trascurabile (relazione 105.4) tale si potrà ritenere anche il secondo: il flusso φ si potrà considerare pressochè costante e quindi mediamente nulla sarà la f.e.m. indotta nell'avvolgimento N_c nell'intervallo in esame. Si può concludere che nel circuito di controllo la corrente dovuta alla f.e.m. variabile è nulla e quindi il valor medio, dipendente solo dalla f.e.m. continua, risulterà:

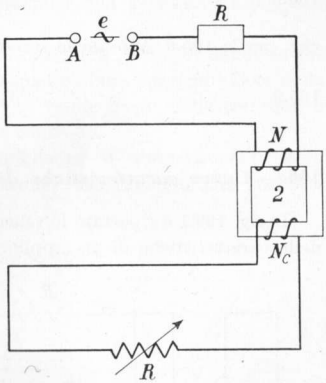


Fig. 105.3 – Circuito equivalente dell'amplificatore magnetico di fig. 105.1 allorché il nucleo del trasduttore 1 è saturo.

105.6 $$I_{cm} = \frac{E_c}{R_c}.$$

Poichè però vi sono degli intervalli in cui la i_c assume valori elevati (allorchè uno dei due nuclei è saturo), quando nessuno dei nuclei è saturo l'intensità di controllo risulta inferiore al valor medio I_{cm} (fig. 105.2, *d*).

Dall'esame dell'andamento nell'intero periodo delle F_1 ed F_2 si può anche dedurre una relazione tra il valor medio della i_c ed il valor medio della i. Negli intervalli di tempo in cui entrambi i nuclei non sono saturati si ha che le F_1 ed F_2 risultano molto piccole. In particolare allora dalla relazione

$$F_2 = N_c i_c - Ni \simeq 0$$

si può ricavare:

105.7 $$N_c i_c \simeq Ni.$$

Alla medesima relazione si giunge allorchè uno dei nuclei, ad esempio il nucleo 1, è saturo; infatti non essendo saturo l'altro nucleo la f.m.m. F_2 si potrà ancora ritenere piccolissima ed uguagliare a zero. La 105.7 fornisce dunque la relazione

esistente tra i valori istantanei dell'intensità di corrente di carico e dell'intensità di corrente di controllo. Se si integrano entrambi i membri della relazione precedente relativamente a mezzo periodo $T/2$ e si dividono i valori trovati per $T/2$ si ottiene:

105.8 $$N_c I_{cm} = N I_m$$

che, per la 105.6, può anche scriversi:

105.9 $$N_c \frac{E_c}{R_c} = N I_m \, .$$

106. – *Curve caratteristiche dell'amplificatore magnetico.*

In fig. 106.1 è riportato lo schema del circuito adatto al rilievo sperimentale delle caratteristiche di un amplificatore magnetico del tipo esaminato nel pa-

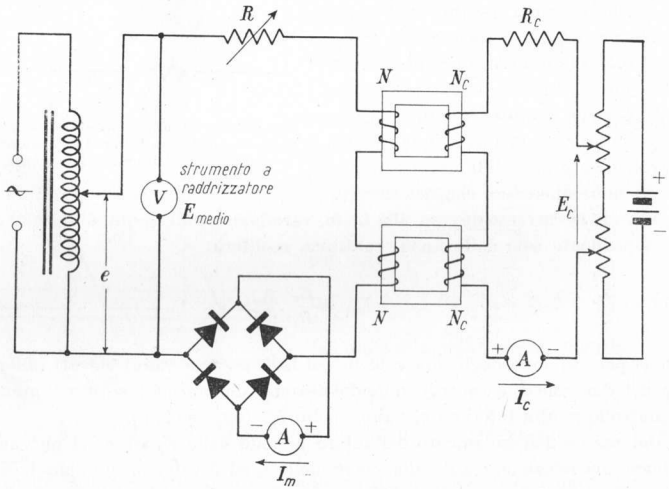


Fig. 106.1 – Circuito per il rilievo delle caratteristiche di un amplificatore magnetico.

ragrafo precedente. Le caratteristiche principali che interessano gli amplificatori magnetici sono quelle che forniscono:

a) il valor medio dell'intensità di corrente di carico I_m in funzione della tensione E presente nel circuito di carico per assegnati valori medi della intensità di corrente di controllo I_{cm} (*caratteristiche di uscita*);

b) il valor medio dell'intensità di corrente di carico I_m in funzione del valor medio dell'intensità di corrente di controllo I_{cm} per assegnati valori della resistenza di carico R (*caratteristiche di controllo* o mutue).

In fig. 106.2, *a*) è indicata una famiglia di caratteristiche di uscita determinate con $R = 0$ (la resistenza del circuito di carico essendo costituita pressochè esclusivamente dalla resistenza degli avvolgimenti). Sulla stessa famiglia sono pure tracciate due rette di carico corrispondenti ad una resistenza di carico R rispettivamente di 50Ω e 100Ω; è indicata pure una verticale tratteggiata valida per $R = 0$.

Le rette di carico riportate su un piano I_m, I_{cm} (fig. 106.2, *b*) danno le caratteristiche di controllo dell'amplificatore magnetico (una per ogni valore della resistenza di carico); da esse si ricava per ogni valore medio della corrente di carico il valore da assegnare alla corrente di controllo.

Le varie disposizioni circuitali atte a migliorare il comportamento degli amplificatori magnetici e le relative applicazioni verranno studiate successivamente.

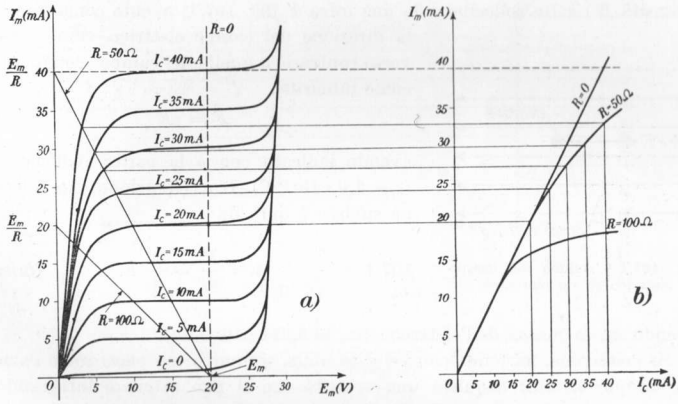


Fig. 106.2 – Famiglia di caratteristiche di un amplificatore magnetico: *a*) caratteristiche di uscita; *b*) caratteristiche di controllo.

CAPITOLO XIII

OTTICA ELETTRONICA

107. – *Azione dei campi elettrici sugli elettroni.*

Un elettrone che venga a trovarsi sotto l'azione di un campo elettrico di intensità E risulta sollecitato da una forza F (fig. 107.1) avente come direzione la direzione del campo elettrico, come verso il verso contrario a quello del campo elettrico [1] e come intensità:

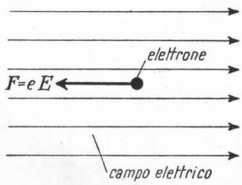


Fig. 107.1 – Azione del campo elettrico su un elettrone.

$$F = eE \qquad (N)$$

avendo indicato con e la carica dell'elettrone ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C). L'accelerazione che l'elettrone subisce è data da:

107.1 $$a = \frac{F}{m_0} = \frac{e}{m_0} E \qquad (\mathrm{m/sec^2})$$

essendo m_0 la massa dell'elettrone ($m_0 = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ kg).

Se l'elettrone, partendo con velocità nulla, si muove *nel vuoto* sotto l'azione del campo elettrico acquista una velocità che si può ottenere integrando il valore della accelerazione nel tempo od ancora più semplicemente notando che l'energia cinetica da esso acquistata $m_0u^2/2$ (u = velocità acquistata dall'elettrone) deve essere pari al lavoro su di esso svolto dalle forze del campo ossia ad eV, avendo indicato con V la d.d.p. tra i punti tra cui avviene lo spostamento dell'elettrone. Dall'uguaglianza:

107.2 $$\frac{1}{2} m_0 u^2 = eV$$

si ricava

$$u = \sqrt{\frac{2e}{m_0}} \sqrt{V}, \text{ [2]}$$

---

[1] Si ricordi che il verso convenzionale del campo elettrico è quello nel quale si muoverebbe una carica elettrica positiva soggetta all'azione del campo stesso.

[2] Questa formula (e le successive da essa ricavate) serve solo in prima approssima-

semplificabile nella:

107.3 $$u = 5{,}9 \cdot 10^5 \sqrt{V} \qquad \text{(m/sec)} .$$

Se l'elettrone nell'istante in cui entra sotto l'azione del campo elettrico possiede una velocità U_0 di direzione parallela alla direzione del campo elettrico, dopo essersi spostato sotto una d.d.p. V possiederà una velocità:

107.4 $$u = U_0 + 5{,}9 \cdot 10^5 \sqrt{V} .$$

Se invece la velocità U_0 con cui l'elettrone entra nel campo elettrico non è parallela alla direzione di questo (fig. 107.2) dopo lo spostamento sotto la d.d.p.

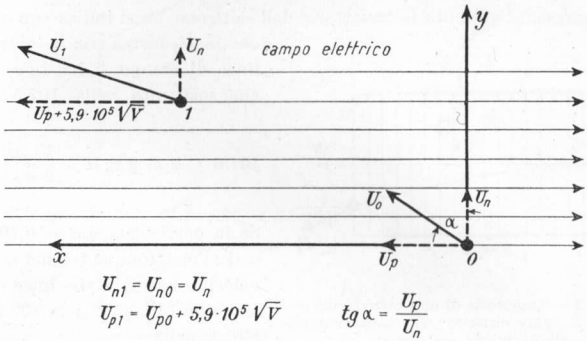


Fig. 107.2 – Variazione di velocità di un elettrone che penetri in un campo elettrico con velocità avente una certa inclinazione rispetto alla direzione del campo elettrico.

V, è la componente parallela U_p che risulta incrementata (secondo la 107.4) mentre quella normale U_n rimane invariata.

Qualora, con riferimento alla fig. 107.2, si desideri conoscere la traiettoria percorsa dall'elettrone nel campo elettrico uniforme si potrà assumere un sistema di assi coordinati come quello indicato nella figura e calcolare lo spazio percorso dall'elettrone nella direzione y e nella direzione x. Il moto nella dire-

---

zione per velocità ridotte non tenendo conto della *correzione di massa* da apportare allorchè la velocità si approssima a quella della luce. Per velocità u elevate è necessario calcolare la massa m con la formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

essendo c la velocità della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ m/sec).

zione y è uniforme mentre nella direzione x è uniformemente accelerato per cui si può scrivere:

107.4
$$y = U_n t$$
$$x = U_p t + \frac{1}{2} a t^2$$

essendo t la variabile tempo (contato a partire dall'istante in cui l'elettrone entra nel campo elettrico). Ricavando l'accelerazione a dalla 107.1 e sostituendone il valore nella seconda delle 107.4 e sostituendo ancora nella seconda delle 107.4 il valore $t = y/U_n$ ricavato dalla prima delle 107.4 si ottiene:

107.5
$$x = \frac{U_p}{U_n} y + \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0 U_n^2} y^2$$

che rappresenta appunto la traiettoria dell'elettrone. Se si indica con α l'angolo che la U_0 forma con la normale alle linee di campo si ha $\operatorname{tg} \alpha = U_p/U_n$ che sostituito nella 107.5 fornisce:

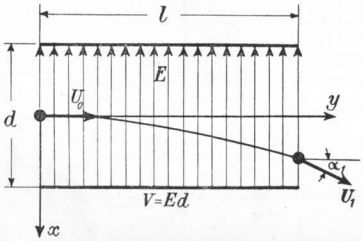


Fig. 107.3 – Traiettoria di un elettrone che penetri in un campo elettrico con velocità normale alla direzione del campo.

107.6
$$x = y \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0 U_n^2} y^2 .$$

Se in particolare è $\alpha = 0$ (fig. 107.3) ossia l'elettrone entra nel campo con velocità normale alle linee di campo (e quindi $U_n = U_0$) la 107.6 si semplifica nella

107.7
$$x = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0 U_0^2} y^2 .$$

La tangente dell'angolo α che il vettore velocità forma con l'asse delle y è data da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{eE}{m_0 U_0^2} y .$$

Per l'angolo α_1 formato con l'asse delle y dalla velocità U_1 con cui l'elettrone abbandona il campo elettrico sarà:

107.8
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{eE}{m_0 U_0^2} l$$

avendo indicato con l la lunghezza delle armature supposte piane e parallele che, distanti tra loro d e aventi d.d.p. V, determinano il campo uniforme di intensità E. Sostituendo nella 107.8 $E = V/d$ si ottiene:

107.9
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{e}{m_0 U_0^2} \frac{l}{d} V .$$

108. – *Azione dei campi magnetici sugli elettroni.*

Se *un elettrone in movimento* (1) viene a trovarsi in un campo magnetico, risulta sollecitato da una forza se la sua velocità è normale (o per lo meno ammette una componente normale) alla direzione del campo magnetico. L'intensità di questa forza è:

108.1 $$F = eU_nB \qquad (N)$$

in cui e è la carica dell'elettrone, B l'induzione magnetica e U_n la componente della velocità dell'elettrone normale all'induzione B. In fig. 108.1 vi sono alcuni

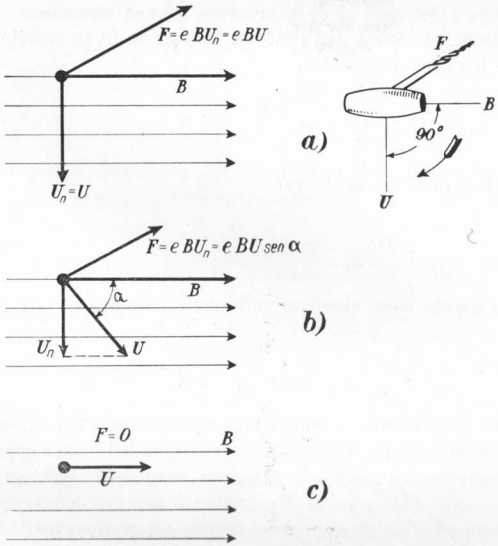


Fig. 108.1 – Azione del campo magnetico su un elettrone.

esempi relativi all'azione di un campo magnetico su un elettrone. In *a*) la velocità dell'elettrone è normale all'induzione B; la forza che si esercita sull'elettrone è massima e data dalla 108.1. In *b*) la velocità dell'elettrone forma un angolo α con l'induzione; la forza che si esercita sull'elettrone è proporzionale alla componente della velocità normale all'induzione $U_n = U \operatorname{sen} \alpha$. In *a*) e *b*) la direzione della forza F che si esercita sull'elettrone è normale al piano formato

(1) La condizione che l'elettrone si muova è assolutamente necessaria affinché avvenga il fenomeno in esame.

da B ed U_n ed il suo verso è dato dal verso in cui avanza un cavatappi (od una vite destrorsa) disposto normalmente al piano suddetto allorchè il suo manico passa dalla posizione parallela alla B alla direzione parallela alla U_n descrivendo l'angolo di 90° (che è quello minore). Infine in *c*) essendo la direzione della velocità U parallela alla direzione della induzione B la forza che si esercita sull'elettrone è nulla.

Da quanto detto risulta che la forza che si esercita sull'elettrone immerso in un campo magnetico è sempre normale alla componente della sua velocità che è normale all'induzione magnetica. Ciò significa che la forza che si esercita sull'elettrone non determina su di esso accelerazione tangenziale, ma unicamente accelerazione centripeta: l'elettrone si muove quindi di moto circolare uniforme. Le caratteristiche di questo moto si possono facilmente determinare osservando che l'elettrone si deve muovere su una circonferenza di raggio r tale che la forza centrifuga dell'elettrone uguagli la forza centripeta che su di esso esercita il campo magnetico:

108.2 $$m_0 \frac{U_n^2}{r} = eU_nB \, .$$

Da quest'ultima relazione si ricava:

108.3 $$r = \frac{m_0}{e} \frac{U_n}{B} \qquad (m) \, .$$

Il periodo di questo moto circolare uniforme è quindi:

108.4 $$T = \frac{2\pi r}{U_n} = \frac{2\pi m_0}{eB} \, .$$

Se la velocità dell'elettrone è completamente normale all'induzione magnetica (fig. 108.2 – caso corrispondente alla fig. 108.1, *a*) l'elettrone si muove su una circonferenza di raggio r. Se invece la velocità con cui l'elettrone penetra nel campo magnetico possiede, oltre una componente normale $U_n = U \operatorname{sen} \alpha$, una componente parallela $U_p = U \cos \alpha$ (fig. 108.3 – caso corrispondente alla fig. 108.1, *b*) l'elettrone viene sollecitato a muoversi di un moto che risulta dalla combinazione del moto circolare uniforme dovuto alla U_n e del moto rettilineo uniforme dovuto alla U_p. Ne deriva un moto elicoidale il cui raggio è ancora dato dalla 108.3, mentre il passo p si può ottenere imponendo l'uguaglianza tra il periodo T dato dal-

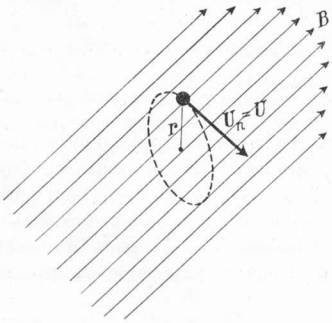


Fig. 108.2 – Traiettoria circolare di un elettrone avente velocità normale all'induzione.

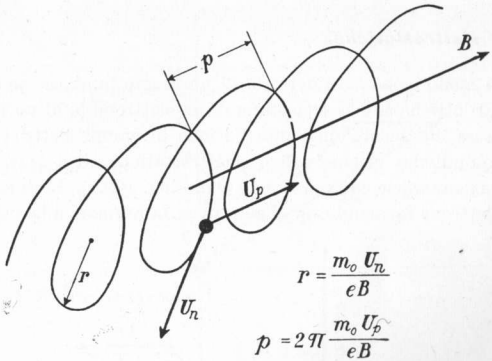


Fig. 108.3 – Traiettoria elicoidale di un elettrone avente velocità di componenti normale e parallela alla direzione dell'induzione.

la 108.4 ed il tempo impiegato dall'elettrone a coprire di moto rettilineo la distanza p, ossia $T = p/U_p$. Dall'uguaglianza

108.5 $$\frac{p}{U_p} = \frac{2\pi r}{U_n}$$

si ricava (sostituendo il valore di r dato dalla 108.3)

108.6 $$p = 2\pi \frac{m_0 U_p}{eB}.$$

Un elettrone contemporaneamente soggetto ad un campo magnetico e ad un campo elettrico acquista un moto che risulta dalla sovrapposizione dei moti che gli competerebbero qualora fosse soggetto separatamente a ciascuno dei campi. I casi che si possono presentare sono molti; alcuni però sono di soluzione relativamente facile ed immediata. Se ad esempio il campo elettrico e l'induzione sono paralleli tra loro, l'elettrone si muove di moto uniformemente accelerato nella direzione del campo elettrico (e verso contrario) se la sua velocità iniziale è parallela al campo; se invece la sua velocità iniziale è normale al campo esso descrive una traiettoria elicoidale il cui raggio è ancora dato dalla 108.3 mentre il passo va progressivamente aumentando essendo il moto di traslazione uniformemente accelerato.

109. – *Lenti elettrostatiche.*

Allo stesso modo come la traiettoria di un raggio luminoso può essere controllata da lenti ottiche così la traiettoria di un elettrone (o di un fascio di elettroni) può essere modificata mediante l'azione di campi elettrici o magnetici che possono quindi dar origine a lenti elettrostatiche od a lenti magnetiche.

Sia data una superficie equipotenziale piana (fig. 109.1). Su di essa nel punto P incida un elettrone formando un angolo i con la normale alla superficie equi-

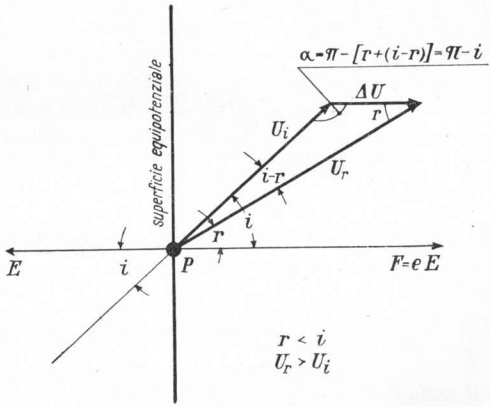


Fig. 109.1 – Esempio di rifrazione elettronica.

potenziale e quindi con la direzione del campo elettrico. L'azione del campo elettrico di intensità E è tale da aggiungere alla velocità U_i con cui l'elettrone incide in P una componente, che per semplicità qui si considera finita, di valore ΔU avente la stessa direzione del campo elettrico e verso contrario. La velocità risultante U_r dell'elettrone è quindi maggiore della velocità di incidenza U_i mentre l'angolo r, che per analogia con la rifrazione ottica si può denominare *angolo di rifrazione*, risulta minore dell'*angolo di incidenza* i. Tra l'angolo di incidenza i e l'angolo di rifrazione r sussiste la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} r} = \frac{U_r}{U_i} \tag{109.1}$$

come è facilmente deducibile dalla fig. 109.1. La fig. 109.2 si riferisce al caso in cui la velocità U_i dell'elettrone incidente sulla superficie equipotenziale abbia una componente di verso contrario alla forza F che il campo elettrico esercita su di esso. In questo caso la 109.1 rimane ancora valida e l'elettrone si allontana dalla normale alla superficie equipotenziale.

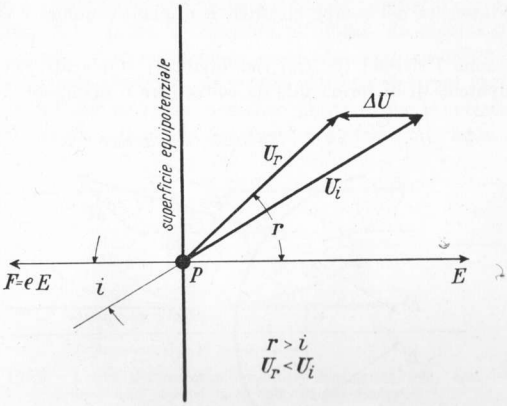


Fig. 109.2 – Altro esempio di rifrazione elettronica.

Se le superfici equipotenziali hanno forma sferica possono esercitare sugli elettroni che le attraversano una azione convergente o divergente. In fig. 109.3 è indicato come due elettroni A e B, inizialmente con velocità parallele, tendono

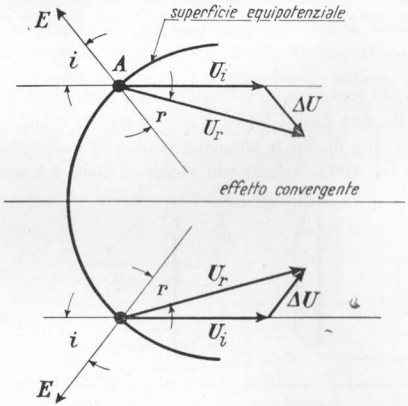


Fig. 109.3 – Una superficie equipotenziale sferica esercita una azione di convergenza sugli elettroni che incidono sulla sua parte concava.

a convergere se incidono nel verso dei potenziali crescenti su una superficie sferica equipotenziale dalla parte concava; mentre in fig. 109.4 i due elettroni A e B, incidendo dalla parte convessa, tendono a divergere. Ovviamente la convergenza o divergenza è tanto maggiore quanto più intenso è nel punto di

incidenza l'intensità del campo elettrico E e quanto minore è la velocità dell'elettrone.

Diversi sono i sistemi (o *lenti elettrostatiche*) impiegati per ottenere superfici equipotenziali di forma tale da convergere o divergere elettroni o fasci

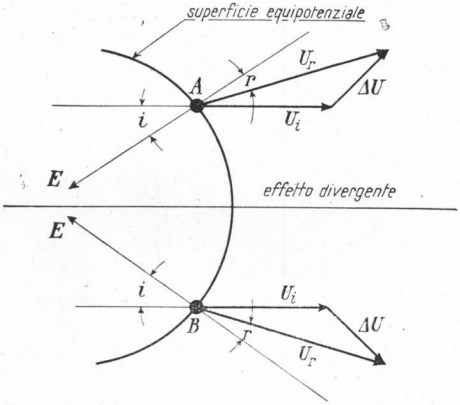


Fig. 109.4 – Una superficie equipotenziale sferica esercita una azione di divergenza sugli elettroni che incidono sulla sua parte convessa.

di elettroni. Il tipo più semplice è costituito dalla *lente elettrostatica di apertura*. Questa è formata da due dischi forati 1 e 2 affacciati e tra i quali è applicata una d.d.p. V. Tra i due dischi le superfici equipotenziali assumono la configurazione indicata in fig. 109.5. Quelle più vicine al disco 1 hanno un effetto con-

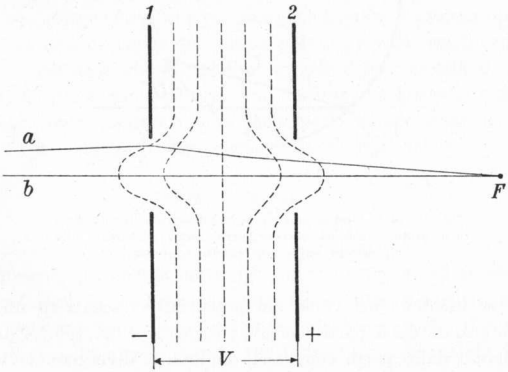


Fig. 109.5 – Lente elettrostatica di apertura.

vergente, mentre quelle più vicine al disco 2 hanno un effetto divergente. L'effetto convergente delle prime è superiore all'effetto divergente delle ultime in quanto gli elettroni quando incidono in queste sono a velocità maggiore e quindi più difficilmente deviabili; ne risulta che due elettroni che seguano le traiettorie *a* e *b* convergono in un medesimo punto *F* che rappresenta il fuoco della lente elettrostatica. Il punto *F* è tanto più vicino alla lente quanto più

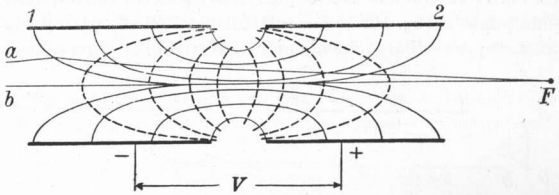


Fig. 109.6 - Lente elettrostatica ottenuta accostando (con asse comune) due cilindri cavi dello stesso diametro.

vicini tra loro sono i due dischi, quanto più piccoli sono i diametri dei fori (perchè aumenta la curvatura delle superfici equipotenziali) e quanto maggiore è la d.d.p. V.

In fig. 109.6 è indicato un altro tipo di lente elettrostatica ottenuta avvicinando tra loro (sullo stesso asse) due cilindri internamente cavi tra i quali è applicata una d.d.p. V. Le superfici equipotenziali assumono l'andamento indicato in figura (linee tratteggiate) [1]. Anche in questo caso l'effetto convergente delle superfici equipotenziali del cilindro 1 supera l'effetto divergente delle superfici equipotenziali del cilindro 2 per cui due elettroni che seguono le traiettorie *a* e *b* convergono nel fuoco *F*. L'azione convergente è maggiore (cioè il fuoco *F* è più vicino alla superficie di separazione dei due cilindri) quanto

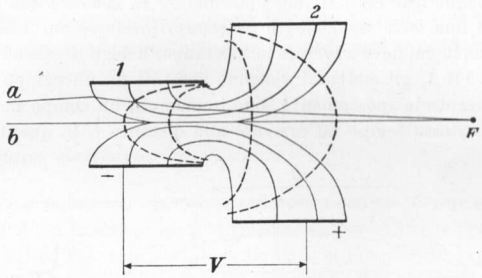


Fig. 109.7 - Lente elettrostatica ottenuta accostando (con asse comune) due cilindri cavi di diametro diverso.

---

[1] Nella fig. 109.6 sono pure indicate in linea sottile le linee di campo elettrico. Si ricordi che le superfici equipotenziali e le linee di campo si intersecano sempre sotto angoli retti.

maggiore è la d.d.p. V e quanto minore è la distanza tra i due cilindri. Inoltre dipende dal diametro dei due cilindri, i quali possono anche avere diametri diversi (fig. 109.7), ed aumenta con il rapporto tra il diametro del cilindro 2 ed il diametro del cilindro 1.

Nelle figure precedenti è stata considerata la convergenza in un punto F sull'asse della lente di due soli elettroni di cui uno viaggiante proprio sull'asse della lente e l'altro su una traiettoria a diversa. La stessa convergenza si verifica nel medesimo punto F (fig. 109.8) per tutti gli elettroni che partono da un medesimo punto O situato sull'asse della lente. Gli elettroni che invece partono da un

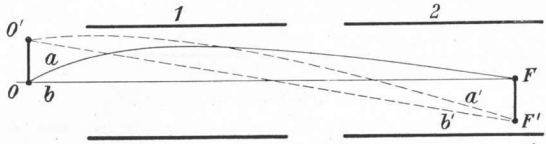


Fig. 109.8 – Convergenza sull'asse e fuori dell'asse di una lente elettrostatica.

medesimo punto O' fuori dell'asse della lente convergono in un punto F' anch'esso fuori dell'asse. Per analogia con le lenti ottiche si può denominare *ingrandimento* il rapporto tra il segmento $F'F$ ed il segmento $O'O$. Si osservi ancora che se i punti O ed O' giacciono sul medesimo piano normale all'asse, anche i punti F ed F' giacciono su un medesimo piano anche normale all'asse.

110. – *Lenti magnetiche.*

Anche magneticamente si può determinare la convergenza degli elettroni. Per ottenere una *lente magnetica* è necessario produrre un campo magnetico nella direzione in cui deve avvenire lo spostamento degli elettroni. Se ad esempio, come in fig. 110.1, gli elettroni vengono spostati da un campo elettrico da O verso F e durante lo spostamento sono immersi in un campo magnetico impiegano tutti lo stesso tempo ad arrivare alla distanza l, in quanto, trascurando

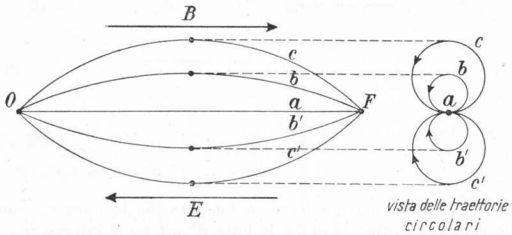


Fig. 110.1 – Lente magnetica lunga.

la velocità iniziale, la velocità che essi acquistano dipende solo dal campo elettrico che è uguale per tutti; invece ogni elettrone che non segua la traiettoria diretta OF presenta una componente di velocità normale all'induzione B e quindi descrive una traiettoria elicoidale di raggio tanto più grande quanto maggiore è la suddetta componente di velocità (secondo la relazione 108.3). Tuttavia il tempo per descrivere una elica intera è indipendente dalla componente di velocità normale alla induzione mentre dipende solo da quest'ultima (secondo la relazione 108.4): nel caso esaminato esso è uguale per tutti gli elettroni ed il fuoco o punto di convergenza può essere regolato per mezzo dell'induzione B.

La fig. 110.1 si riferisce ad una *lente magnetica lunga* intendendosi con tale denominazione una lente che determina un campo magnetico uniforme con

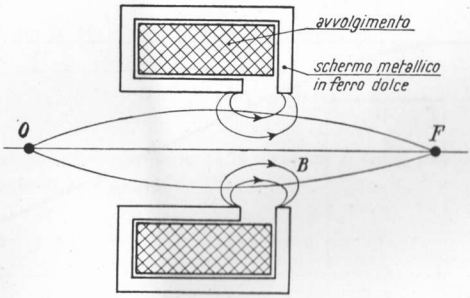


Fig. 110.2 - Lente magnetica corta.

simmetria assiale e che occupa tutto il percorso degli elettroni. Sono in pratica usate le *lenti magnetiche corte* che occupano una zona di lunghezza trascurabile rispetto al percorso degli elettroni (fig. 110.2); se la lunghezza e l'intensità del campo magnetico sono opportunamente dimensionati si produce la concentrazione degli elettroni in un punto F prestabilito.

111. – *Deflessione elettrostatica.*

La *deflessione o deviazione elettrostatica* di un elettrone è ottenuta facendo passare l'elettrone tra due placche dette *placche deflettrici* tra le quali è applicata una certa d.d.p. V: viene portata a potenziale più elevato la placca dalla parte della quale si vuole che avvenga la deviazione dell'elettrone.

Sia, in fig. 111.1, O la sorgente di elettroni ed α lo schermo su cui questi devono incidere; siano P_1 e P_2 le placche deflettrici. Un elettrone che parte da O ed è accelerato da un campo elettrico diretto secondo l'asse y allorchè giunge nel campo d'azione delle placche deflettrici viene deviato dalla parte della placca P_2; nel tratto interessato dalle placche esso descrive un arco di

parabola e (secondo quanto esaminato nel paragrafo 107) esce dalle placche avendo una velocità U_1 che forma con l'asse y un angolo α_1 dato dalla 107.9:

111.1 $$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{e}{m_0 U_0^2} \frac{l_1}{d} V$$

essendo U_0 la velocità con cui l'elettrone entra nel campo d'azione delle placche, l_1 la lunghezza di queste e d la loro distanza. La velocità U_0 con cui l'elettrone

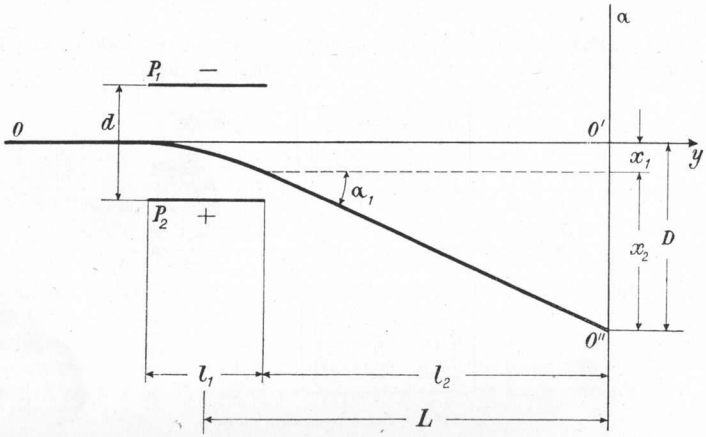


Fig. 111.1 – Deflessione elettrostatica.

entra nel campo d'azione delle placche dipende dal potenziale V_a che un elettrodo acceleratore situato immediatamente prima delle placche possiede rispetto alla sorgente di elettroni O. Dalla 107.2 si ricava allora direttamente:

111.2 $$U_0^2 = \frac{2e}{m_0} V_a$$

e sostituendo questo valore nella 111.1 si ottiene:

111.3 $$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{l_1}{2dV_a} V \, .$$

La deviazione totale D che l'elettrone subisce prima di giungere sullo schermo α è data dalla somma della deviazione x_1 che l'elettrone subisce nel percorso l_1 tra le placche e della deviazione x_2 che l'elettrone subisce nel percorso l_2. La deviazione x_1 si calcola mediante la 107.7 sostituendo l_1 ad y, ottenendosi

ora (ricorrendo pure alla 111.2):

111.4 $$x_1 = \frac{V}{4V_a d} l_1^2 .$$

Dopo le placche l'elettrone prosegue secondo la tangente al punto finale della parabola. Si potrà quindi scrivere:

111.5 $$x_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha_1$$

e per la 111.3:

111.6 $$x_2 = \frac{V}{2dV_a} l_1 l_2$$

Addizionando ora la 111.4 con la 111.6 si ottiene:

111.7 $$D = \frac{V}{2dV_a} l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) .$$

Il fattore entro parentesi rappresenta la distanza L tra il punto di mezzo delle placche e lo schermo: è quindi

111.8 $$D = \frac{V}{2dV_a} l_1 L .$$

Prende il nome di *sensibilità di deviazione* s_d il rapporto tra la deviazione D e la d.d.p. V che la produce. Dalla 111.8 si ricava:

111.9 $$s_d = \frac{l_1 L}{2dV_a} .$$

112. – *Deflessione magnetica.*

La *deflessione magnetica* di un elettrone è ottenuta facendo passare l'elettrone in una zona in cui agisca un campo magnetico normale alla sua velocità U_0 (fig. 112.1). Per quanto è stato detto nel paragrafo 108, l'elettrone incidente normalmente al campo magnetico con velocità U_0 segue una traiettoria circolare finchè si trova nella zona del campo da cui poi si allontana con una velocità U_1 che forma con l'asse y un angolo α_1 . Poichè la forza che sollecita l'elettrone, dovuta al campo magnetico, è sempre normale alla velocità dell'elettrone si deduce che è $U_1 = U_0$.

In fig. 112.1 si prolunghi la $O''M$ fino ad intersecare in T l'asse OO'. Si indichi poi con C il centro di curvatura della traiettoria circolare di raggio r e con β l'angolo determinato dalle congiungenti il punto C con i punti H ed M (estremi della traiettoria dell'elettrone nel campo magnetico). Indicando poi

con Z la proiezione del punto M sulla retta CH si potrà scrivere

$$MZ = l_1 = r \operatorname{sen} \beta \, .$$

Essendo l'angolo β ordinariamente molto piccolo la relazione precedente equivale alla $l_1 \simeq r\beta$ da cui si ricava $\beta = l_1/r$. Se ora si considerano i triangoli CTH

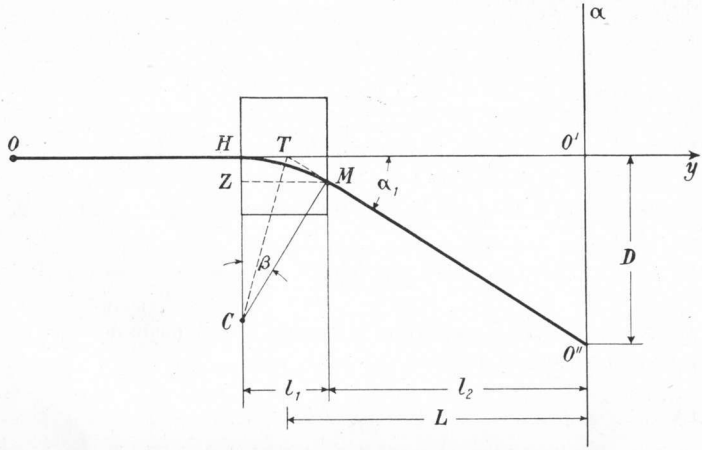


Fig. 112.1 – Deflessione magnetica.

e CTM si constata che sono uguali essendo entrambi triangoli rettangoli ed avendo l'ipotenusa CT in comune ed il cateto CH uguale al cateto CM. Si deduce che l'angolo al centro corrispondente ad HT equivale a $\beta/2$ e quindi

$$HT = \frac{\beta}{2} r = \frac{1}{2} \frac{l_1}{r} r = \frac{l_1}{2} \, .$$

Il punto T cade quindi nel centro del campo magnetico ed è $TO' = l_1/2 + l_2 = L$. Si ricava per la deviazione D:

112.1 $$D = L \operatorname{tg} \alpha_1 \, .$$

Dalla fig. 112.1 si può facilmente rilevare che $\alpha_1 = \beta$ e quindi (per l'ipotesi fatta in precedenza) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \beta \simeq \beta$ per cui la 112.1 diviene:

112.2 $$D = L\beta = L \frac{l_1}{r} \, .$$

Il raggio della traiettoria circolare può essere ricavato dalla 108.3 e quindi:

112.3 $$D = \frac{eB}{m_0 U_0} L l_1 \, .$$

Il valore di U_0 è ricavabile dalla 111.2 e sostituito nella relazione precedente fornisce:

112.4 $$D = \sqrt{\frac{e}{2m_0}} \frac{Ll_1 B}{\sqrt{V_a}} .$$

Si può ora, per analogia con la deviazione elettrostatica, denominare *sensibilità di deviazione* il rapporto tra la deviazione D e l'induzione B che la produce. Si ha

112.5 $$s_d = \sqrt{\frac{e}{2m_0}} \frac{Ll_1}{\sqrt{V_a}} .$$

È interessante constatare che nella 112.4 e nella 112.5 interviene il rapporto e/m_0 a differenza di quanto avviene per la deviazione elettrostatica.

113. – *Tubi a raggi catodici.*

Il *tubo a raggi catodici* è un tipo particolare di tubo a vuoto; una porzione del suo involucro di vetro è rivestito di materiale che diviene fluorescente allorchè è colpito da un fascio elettronico. Le parti essenziali di un tubo a raggi catodici sono: il *cannone elettronico* o proiettore elettronico, il *sistema di focalizzazione*, il *sistema di deflessione* e lo *schermo fluorescente*.

Il *cannone elettronico* serve per produrre un fascio di elettroni. Esso comprende (fig. 113.1) un catodo emettitore, di forma cilindrica con una estremità ricoperta di materiale termoemittente; il filamento riscaldatore è posto nell'interno del cilindro. Oltre il catodo vi è la griglia controllo, anch'essa di forma cilindrica, disposta coassialmente al catodo che racchiude nel suo interno. Per permettere il passaggio degli elettroni la griglia porta un foro di fronte alla superficie emittente del catodo. La griglia controllo viene portata ad un potenziale negativo rispetto al catodo e dal valore di questo potenziale dipende il numero di elettroni che nell'unità di tempo passando attraverso la griglia possono raggiungere lo schermo: si può così regolare l'*intensità* del fascio elettronico. Completa il cannone elettronico l'elettrodo acceleratore portato ad un potenziale positivo piuttosto elevato rispetto al catodo; anch'esso è provvisto di fori necessari al passaggio degli elettroni. L'azione del complesso catodo-griglia controllo-elettrodo acceleratore fa sì che la concentrazione degli elettroni avvenga nel punto O la cui immagine elettronica deve essere riprodotta sullo schermo.

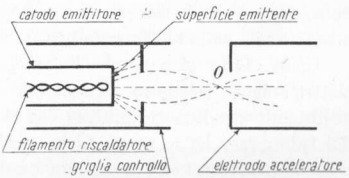


Fig. 113.1 – Cannone elettronico.

Al cannone elettronico fanno seguito il *sistema di focalizzazione* e quello *di*

deflessione che sono del tipo di quelli studiati nel paragrafo precedente (elettrostatici o magnetici). In fig. 113.2 è rappresentata la costituzione interna di un tubo a raggi catodici nel quale sia la focalizzazione che la deflessione sono ottenute elettrostaticamente.

Nel confronto tra il sistema di focalizzazione elettrostatica ed il sistema di focalizzazione magnetica si può osservare che il primo risulta meno ingombrante ed anche meno costoso.

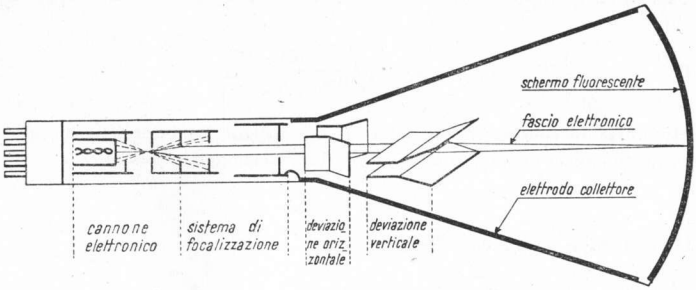


Fig. 113.2 – Costituzione interna di un tubo a raggi catodici con focalizzazione e deflessione elettrostatiche.

Per i sistemi di deflessione risulta dalla 111.9 che la sensibilità della deflessione elettrostatica è inversamente proporzionale al potenziale V_a dell'elettrodo acceleratore mentre dalla 112.5 si vede che la deflessione magnetica è inversamente proporzionale alla radice quadrata del potenziale V_a dell'elettrodo acceleratore. Ne deriva che allorchè si vogliono ottenere grandi angoli di deflessione (tubi a raggi catodici per televisione) i migliori risultati si conseguono con la deflessione magnetica, mentre questa è convenientemente sostituita dalla deflessione elettrostatica quando gli angoli di deflessione che si vogliono ottenere non sono molto grandi (tubi a raggi catodici per oscillografi).

In fig. 113.2 si nota che l'ultimo elettrodo del sistema di focalizzazione è elettricamente collegato all'elettrodo collettore il quale è costituito da un rivestimento conduttore (grafite) che ricopre internamente la parte troncoconica del tubo; esso ha lo scopo di raccogliere gli elettroni che non raggiungono lo schermo fluorescente e quelli emessi da quest'ultimo per emissione secondaria.

Lo *schermo fluorescente* è ottenuto ricoprendo la superficie interna della calotta di vetro che costituisce il fondo del tubo con materiali particolari detti fosfori che vengono eccitati dal fascetto di elettroni incidenti in modo da renderne visibile la posizione. Tre sono le caratteristiche principali della traccia luminosa che compare sullo schermo; esse dipendono dal tipo di fosforo usato e sono: il colore, la persistenza e la luminosità.

Il *colore* dipende dalla composizione spettrale della luce emessa dal fosforo ed ha importanza in relazione alla maggiore o minore attitudine ad impressionare l'occhio oppure la pellicola fotografica. La *persistenza* è dovuta al fatto

che la luce emessa dal fosforo non si estingue immediatamente al cessare del bombardamento elettronico ma decresce con legge esponenziale in modo da restare visibile per un tempo che può variare da pochi microsecondi a diversi secondi. In genere non conviene che la persistenza sia molto elevata; essa è utile in due casi particolari: quando si osservano fenomeni periodici di bassa frequenza ed in tal caso evita lo scintillamento dell'immagine e quando si devono osservare rapidissimi fenomeni transitori che così rimangono visibili più

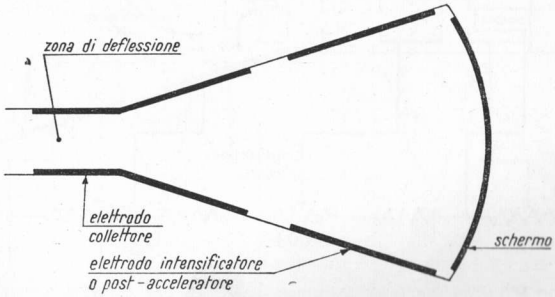


Fig. 113.3 - Tubo a raggi catodici con post-accelerazione.

a lungo sullo schermo. La *luminosità* dipende sia dal fosforo usato (particolari materiali attivatori in esso presenti servono ad aumentarla) sia dalla potenza del fascetto elettronico incidente e quindi anche dal potenziale V_a dell'elettrodo acceleratore. È evidente quindi che le esigenze di luminosità e di sensibilità di deflessione sono tra loro contrastanti. Si rimedia a questo contrasto con i tubi a post-accelerazione (fig. 113.3). In questi il potenziale acceleratore V_a non è tenuto molto alto, mentre ad un potenziale elevato è portato un elettrodo intensificatore situato dopo il sistema di deflessione e costituito da una fascia di rivestimento conduttore (grafite) nella zona troncoconica del tubo vicina allo schermo.

Nella tabella seguente sono indicati alcuni tipi di fosfori con relativa composizione chimica ed eventuale attivatore e con l'indicazione del colore emesso.

Fosforo	Composizione chimica	Attivatore	Colore
Alluminato di zinco	$ZnO + Al_2O_3$	Mn	Blu-verde
Silicato di zinco	$ZnO + SiO_2$	Mn	Blu-verde
Solfato di zinco-cadmio	$ZnS + CdS$	Mn	Blu-rosso
Silicato di magnesio	$MgO + SiO_2$	Mn	Arancio-rosso
Alluminato di zinco	$ZnO + Al_2O_3$	Cr	Rosso
Tungstato di calcio	$CdO + WO_3$	—	Blu chiaro

In fig. 113.4 è rappresentata la composizione schematica di un tubo a raggi catodici con le polarizzazioni degli elementi del cannone elettronico e del si-

stema di focalizzazione e post-accelerazione; a titolo indicativo sono pure riportati i valori delle tensioni ed i sistemi di regolazione dell'intensità luminosa e del fuoco.

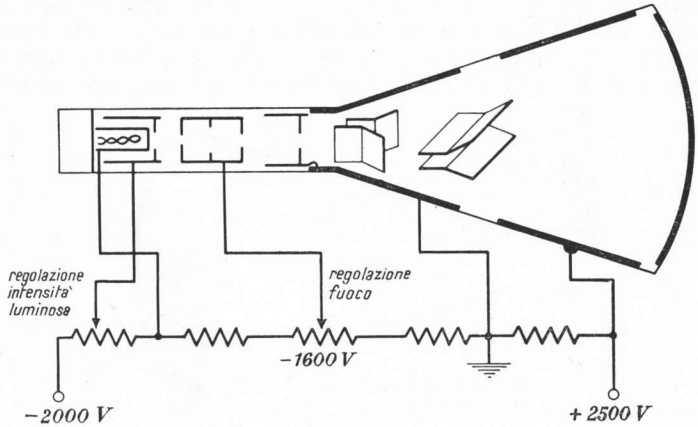


Fig. 113.4 – Composizione schematica di un tubo a raggi catodici a post-accelerazione ed indicazione delle polarizzazioni e delle regolazioni del sistema proiettore e focalizzatore.

114. – *Impiego dei tubi a raggi catodici come oscillografi.*

L'*oscillografo a raggi catodici* è uno strumento che serve per la visione diretta od il rilievo di forme d'onda di tensione (1). Esso contiene come elemento principale il tubo a raggi catodici ed inoltre diversi circuiti particolari.

Se, a cannone elettronico e sistema di focalizzazione funzionanti, non si applica alcuna d.d.p. tra la placche di ciascuno dei due sistemi di deflessione (verticale ed orizzontale) il fascio o pennello elettronico produce una macchia o puntino luminoso nel centro dello schermo. Se invece alle placche di deflessione verticale si applica la forma d'onda di tensione da esaminare (od una ad essa simile, ottenuta ad esempio mediante amplificazione della forma d'onda primitiva) il pennello elettronico si mette ad oscillare in senso verticale e, data la persistenza, sullo schermo appare un segmento la cui lunghezza è proporzionale alla ampiezza della tensione assegnata. Per ottenere l'immagine della forma d'onda occorre provvedere alla deflessione orizzontale la quale per altro deve essere funzione del tempo; si applica quindi alle placche del sistema di deflessione orizzontale una tensione a dente di sega.

---

(1) Per quanto sia correntemente usato indifferentemente il termine oscillografo, sarebbe più esatto denominare *oscilloscopio* lo strumento che permette di osservare la forma d'onda riprodotta sullo schermo ed *oscillografo* quello che ne consente la registrazione fotografica.

In fig. 114.1 è indicato come si possa ottenere sullo schermo una forma d'onda sinusoidale applicando contemporaneamente alle placchette verticali la tensione sinusoidale e alle placchette orizzontali una tensione a dente di

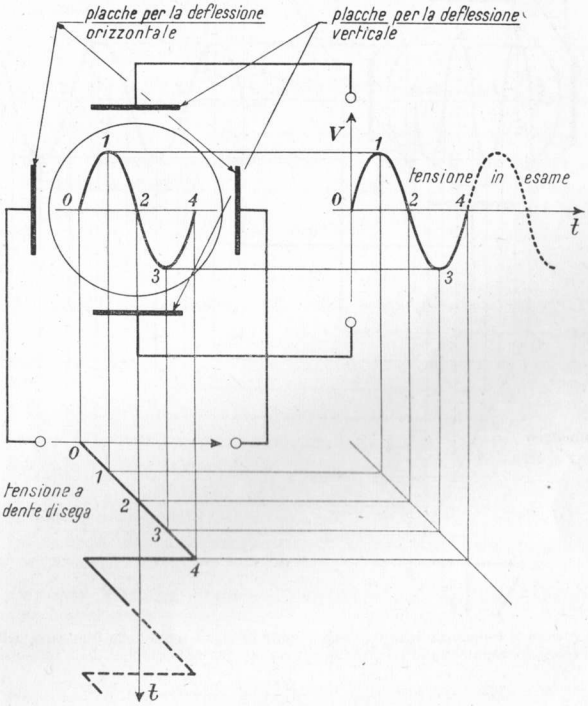


Fig. 114.1 – Se la tensione in esame e la tensione a dente di sega hanno la stessa frequenza sullo schermo compare un solo periodo completo della tensione in esame.

sega della medesima frequenza della tensione sinusoidale. È facile verificare che se invece la frequenza della tensione a dente di sega è inferiore (secondo un rapporto intero) alla frequenza della tensione sinusoidale, sullo schermo vengono rappresentate tante sinusoidi quanto è il rapporto tra la frequenza della tensione sinusoidale e la frequenza della tensione a dente di sega (fig. 114.2).

I circuiti che in un oscillografo vengono associati al tubo a raggi catodici sono in linea di massima i seguenti:

a) i circuiti di *alimentazione* che servono sia per l'alimentazione del tubo a raggi catodici sia degli altri circuiti ad esso collegati;

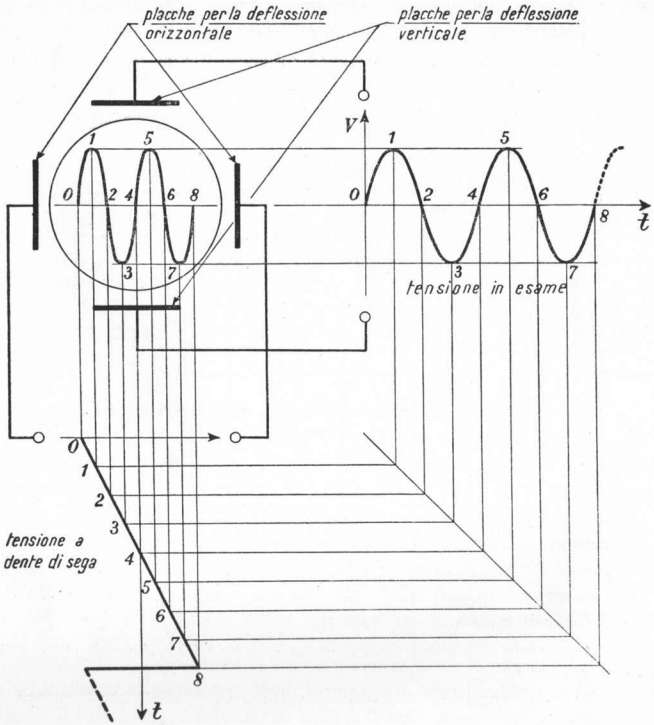


Fig. 114.2 – Se la frequenza della tensione a dente di sega è metà della frequenza della tensione in esame (periodo doppio) sullo schermo appaiono due periodi completi della tensione in esame.

b) l'*amplificatore verticale* che amplifica il segnale da osservare prima che esso venga applicato alle placche di deflessione verticale;

c) i circuiti atti a generare la tensione a dente di sega (*base dei tempi*) la cui frequenza deve poter essere regolata dall'operatore secondo i fini dell'osservazione;

d) l'*amplificatore orizzontale* situato tra il generatore della tensione a dente di sega e le placche di deflessione orizzontale;

e) il circuito di *sincronismo* che è in grado di far coincidere la frequenza dei segnali di scansione (base dei tempi) esattamente con la frequenza del segnale in esame o con un suo sottomultiplo dimodochè l'immagine sullo schermo appaia immobile.

In fig. 114.3 è rappresentato uno schema a blocchi di un oscillografo di composizione abbastanza semplice.

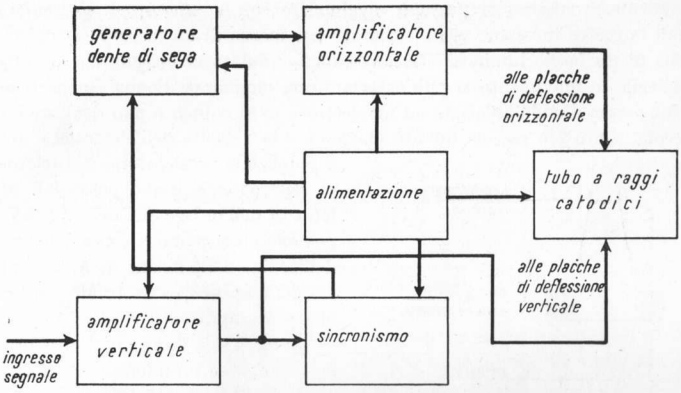


Fig. 114.3 – Schema a blocchi dei circuiti di un semplice oscillografo.

I comandi sempre presenti, anche nei più semplici oscillografi, sono i seguenti:

a) *accensione* (interruttore generale);

b) *luminosità* (tensione di griglia);

c) *messa a fuoco* (sistema di focalizzazione);

d) *spostamento orizzontale* (applica una polarizzazione costante alle placche deflettrici orizzontali);

e) *spostamento verticale* (applica una polarizzazione costante alle placche deflettrici verticali);

f) *ampiezza verticale* (regola l'amplificazione dell'amplificatore verticale);

g) *ampiezza orizzontale* (regola l'amplificazione dell'amplificatore orizzontale);

h) *frequenza* dell'oscillatore a dente di sega;

i) *sincronismo*.

115. – *Cenni sul microscopio elettronico.*

Il limite pratico di impiego di un ordinario microscopio ottico è rappresentato dal suo *potere separatore*. Questo può essere definito come la distanza minima tra due punti ancora distinguibili fra loro. Il potere separatore è una funzione diretta della lunghezza d'onda λ della radiazione luminosa utilizzata per l'osservazione. Si può ridurre al minimo il potere separatore impiegando, con opportuni accorgimenti, luce ultravioletta (λ dell'ordine dei 4000 Å) che è quella di minor lunghezza d'onda: si possono così ottenere poteri separatori minimi dell'ordine dei 2000 Å.

Risultati migliori si possono raggiungere con i *microscopi elettronici* nei quali l'oggetto in esame viene esplorato per mezzo di un fascio elettronico anzichè di un fascio luminoso. La meccanica ondulatoria insegna che a tutte le particelle in movimento si può associare una lunghezza d'onda. In particolare la lunghezza d'onda associata ad un elettrone in movimento può risultare molto piccola, tanto più piccola quanto maggiore è la velocità dell'elettrone e quindi il potenziale acceleratore. Nei microscopi elettronici si usano potenziali acceleratori dell'ordine dei 50 ÷ 100 kV cui possono corrispondere poteri separatori dell'ordine delle decine di Å. Il vantaggio del microscopio elettronico su quello ottico è quindi nettissimo.

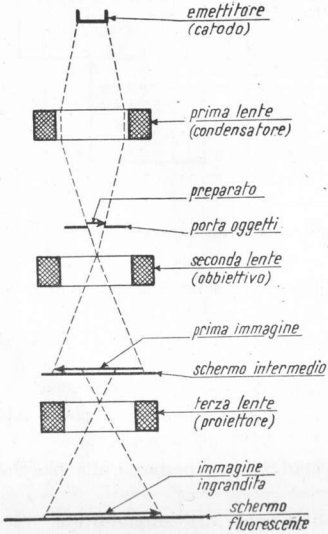


Fig. 115.1 – Schema di principio di un microscopio elettronico (di tipo magnetico).

In fig. 115.1 è rappresentato in modo schematico un microscopio elettronico di tipo magnetico. Le parti principali di un microscopio elettronico possono essere così elencate:

a) l'*emettitore* di elettroni (catodo) e l'*anodo* acceleratore;

b) la prima lente (*condensatore*) che permette la focalizzazione degli elettroni sull'oggetto in esame;

c) il *porta-oggetti* su cui si dispone il preparato in osservazione che deve essere di spessore molto ridotto per non essere distrutto dal bombardamento elettronico;

d) la seconda lente (*obbiettivo*) che forma una prima immagine dell'oggetto su uno schermo intermedio;

e) lo *schermo intermedio* che è un disco ricoperto di materiale fluorescente e forato al centro per permettere il passaggio degli elettroni che vanno a formare l'immagine definitiva: l'osservazione della prima immagine su questo schermo consente la messa a punto dell'apparecchio;

f) la terza lente (*proiettore*) che dà l'immagine ingrandita dell'oggetto in esame;

g) lo *schermo fluorescente* o la macchina fotografica.

Completano il microscopio elettronico l'alimentatore dell'alta tensione ed il gruppo di pompaggio necessario per mantenere nell'interno del microscopio un vuoto molto spinto.

CAPITOLO XIV

DISPOSITIVI FOTOELETTRICI

116. – *Effetti fotoelettrici. Emissione fotoelettronica.*

Sono effetti fotoelettrici quelli nei quali la luce dà luogo a fenomeni di natura elettrica. I *dispositivi fotoelettrici* sono dispositivi adatti ad utilizzare gli effetti fotoelettrici, i quali sono essenzialmente di tre tipi:

a) *effetto fotoemissivo*, utilizzato nelle cellule fotoemissive nelle quali la luce incidente su una superficie fotosensibile produce l'emissione di elettroni;

b) *effetto fotoconduttivo*, utilizzato nelle cellule fotoconduttrici che presentano resistenza variabile in funzione della luce incidente;

c) *effetto fotovoltaico*, utilizzato nelle cellule fotovoltaiche nelle quali si producono f.e.m. quando sono esposte alla luce.

È noto che l'emissione di un elettrone dalla superficie di un corpo può avvenire solo se l'elettrone possiede una energia sufficiente a vincere il lavoro di estrazione $W_e = V_i \cdot e$ (V_i potenziale intrinseco del corpo ed e carica dell'elettrone). Questa energia può essere fornita all'elettrone in diversi modi: ad esempio con il riscaldamento nell'emissione termoelettronica, con il bombardamento elettronico (o ionico) nell'emissione secondaria. Qui si vuole considerare l'*emissione fotoelettronica* nella quale è una radiazione luminosa che provvede a cedere all'elettrone l'energia necessaria all'emissione.

L'emissione fotoelettronica si spiega con la teoria dei quanti secondo la quale l'energia, radiante e nel caso in esame quella luminosa, è composta di quantità elementari o granuli di energia detti *fotoni* a ciascuno dei quali si deve associare una energia elementare hf, essendo h la costante di Plank ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J sec) ed f la frequenza propria della radiazione luminosa. L'emissione fotoelettronica si può verificare solo se l'energia hf è superiore al lavoro di estrazione W_e della superficie colpita dalla radiazione luminosa. In tal caso un elettrone potrà abbandonare la superficie emittente con una energia cinetica data dallo scarto tra l'energia del fotone ed il lavoro di estrazione:

116.1 $$\frac{1}{2} m_0 u^2 = hf - W_e \, .$$

Si noti che la possibilità dell'emissione fotoelettrica è verificata solo per fotoni aventi frequenza superiore ad un valore minimo che prende il nome di *soglia*

fotoelettrica f_0 ed è dato da:

116.2 $$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{e}{h} V_i \, .$$

Si vede che la soglia fotoelettrica è una caratteristica del materiale costituente la superficie fotoemittente ed è funzione diretta del suo potenziale intrinseco. Se la frequenza della radiazione luminosa è inferiore alla soglia fotoelettrica nessuna emissione è possibile per quanto elevata sia l'intensità luminosa; con questa invece aumenta l'emissione fotoelettrica per frequenze superiori alla soglia.

Per un dato materiale fotoemittente l'entità dell'effetto fotoelettrico è una funzione della frequenza (e quindi della lunghezza d'onda $\lambda = c/f$) della radiazione luminosa. In fig. 116.1 sono indicate le *sensibilità* o *risposte spettrali* di alcuni materiali fotoemittenti (sodio, potassio, rubidio, cesio) in funzione della lunghezza d'onda della radiazione incidente.

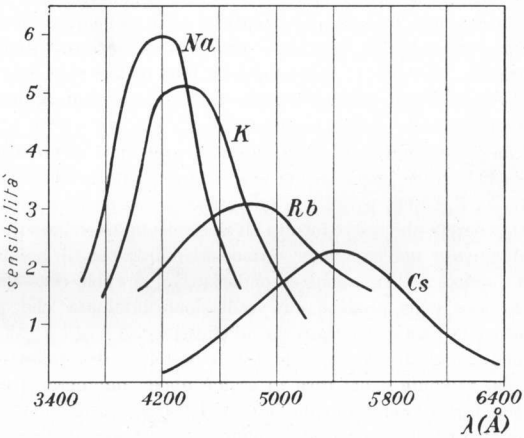


Fig. 116.1 - Risposta spettrale di materiali fotoemittenti.

117. - *Cellule fotoemissive.*

Le *cellule fotoemissive* a vuoto sono costituite da un involucro di vetro in cui è stato praticato il vuoto e nel quale sono presenti un catodo ed un anodo. Il catodo è ordinariamente un semicilindro di rame o di argento (fig. 117.1, *a*) rivestito di materiale fotosensibile sulla superficie rivolta verso l'anodo, mentre questo è un sottile filo metallico disposto sull'asse del cilindro cui appartiene il catodo. La maggior superficie data al catodo serve per il raccoglimento di

una maggior quantità di luce incidente e quindi per una maggior corrente di emissione; la ridotta superficie anodica ha lo scopo di non porre *in ombra* alcuna parte del catodo. In fig. 117.1, *b*) è rappresentato un catodo cilindrico con fori che, a differenza del catodo direzionale di fig. 117.1, *a*), è ugualmente sensibile alla luce proveniente da ogni direzione.

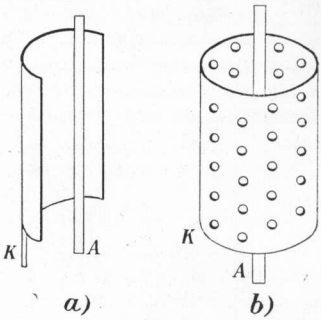


Fig. 117.1 Catodi per cellule fotoemissive: *a*) direzionale; *b*) non direzionale.

L'anodo di una cellula fotoemissiva lavora ad un potenziale positivo rispetto al catodo. L'intensità di corrente anodica risulta una funzione della tensione anodica per ogni valore costante di flusso incidente sulla superficie fotosensibile del catodo. Si può così avere una famiglia di caratteristiche anodiche come quella rappresentata in fig. 117.2. Come parametro relativo ad ogni curva compare il flusso luminoso misurato in lumen (lm). In fig. 117.3 è rappresentato il circuito per il rilievo delle caratteristiche anodiche di una cellula fotoemissiva: occorre evidentemente che il circuito della lampada *L* sia tarato in modo che ad ogni posizione del cursore del reostato *R* corrisponda un determinato valore del flusso luminoso interessante la cellula.

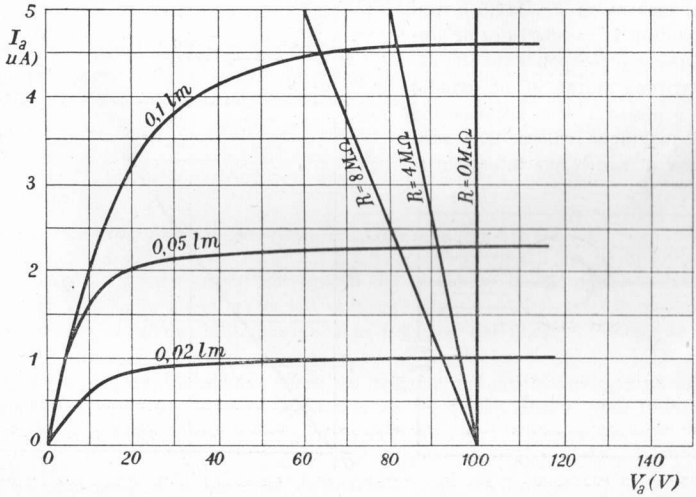


Fig. 117.2 - Famiglia di caratteristiche anodiche di una cellula fotoemissiva.

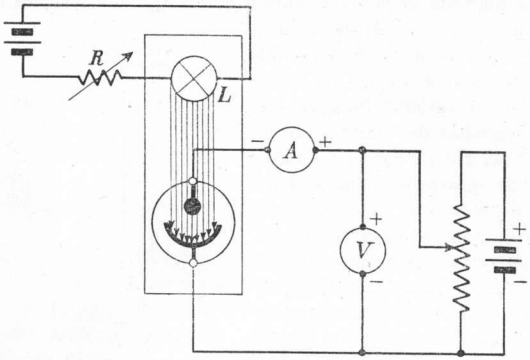


Fig. 117.3 – Circuito per il rilievo delle caratteristiche anodiche di una cellula fotoemissiva.

Il circuito di impiego di una cellula fotoemissiva è rappresentato in fig. 117.4. Questo circuito si studia allo stesso modo di un circuito comprendente un triodo: l'unica differenza consiste nel fatto che mentre nel triodo è la tensione di griglia che fa variare l'intensità di corrente anodica, nella cellula fotoelettrica il comando viene fornito dal flusso luminoso. In fig. 117.2 sono anche riportate le rette di carico relative ad alcuni valori della resistenza di carico, mentre, in fig. 117.5 è rappresentata la *caratteristica di illuminazione* (corrispondente alla caratteristica mutua di un triodo) che è presso a poco la medesima per qualunque valore della resistenza di carico che intersechi le

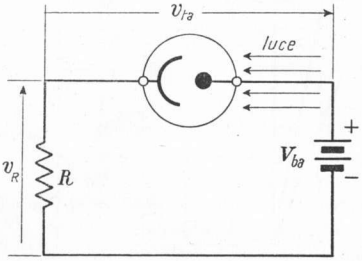


Fig. 117.4 – Circuito di impiego di una cellula fotoemissiva.

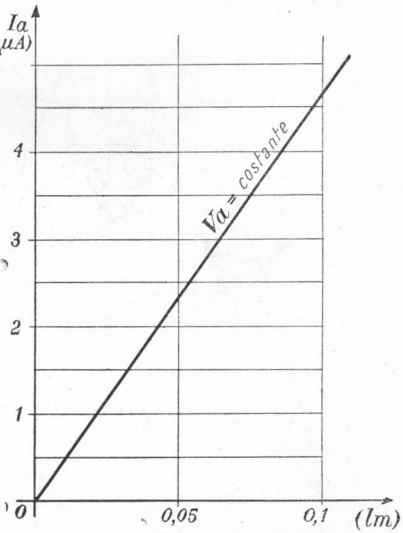


Fig. 117.5 – Caratteristica di illuminazione di una cellula fotoemissiva.

caratteristiche anodiche nella zona di saturazione che è quella di normale funzionamento (infatti in questa zona l'intensità di corrente anodica viene a dipendere solo dal flusso luminoso e non dalla tensione applicata).

Vi sono anche cellule fotoemissive a gas nel cui involucro è presente un gas inerte (molto usato è l'argon). La sensibilità delle cellule fotoemissive a gas è più elevata di quelle a vuoto; tuttavia dalle loro caratteristiche (fig. 117.6) si rileva che l'intensità di corrente anodica è funzione oltre che dell'intensità

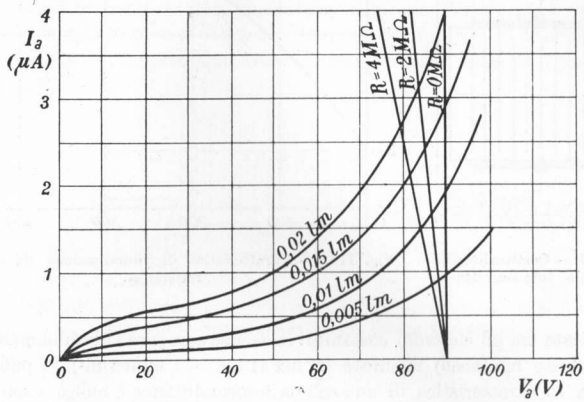


Fig. 117.6 – Caratteristiche anodiche di una cellula fotoemissiva a gas.

della radiazione luminosa incidente anche della tensione anodica. Ciò può portare a distorsioni che possono essere ridotte usando resistenze di carico di valore elevato. Altro svantaggio delle cellule fotoemissive a gas nei confronti di quelle a vuoto è la minore prontezza di risposta alle variazioni di flusso luminoso.

118. – *Cellule fotoconduttrici.*

Le *cellule fotoconduttrici* sono quelle che sfruttano l'effetto fotoconduttivo che si verifica in alcuni materiali semiconduttori i quali hanno la proprietà di avere una conducibilità variabile in funzione del flusso luminoso da cui vengono investiti. Questa proprietà si spiega ammettendo che l'energia luminosa sia in grado di rendere liberi un maggior numero di elettroni periferici degli atomi del materiale fotoconduttivo. Tra i materiali usati vi sono: il selenio, il solfuro di tallio, il solfuro di cadmio ed il trisolfuro di antimonio.

La costituzione di una cellula fotoconduttrice è schematizzata in fig. 118.1. Una piastrina di materiale fotoconduttore è posta tra due elettrodi che si prolungano a pettine sulla piastrina stessa; si realizzano così entrambe le condizioni

richieste da una maggiore sensibilità: la vicinanza degli elettrodi ed una relativamente grande estensione superficiale del materiale fotoconduttore. In fig. 118.2 è rappresenta una *caratteristica di illuminazione* di una *fotoresistenza* (per tensione applicata tra gli elettrodi costante): in ascisse compare l'illuminamento (densità di flusso luminoso) misurato in lux (1 lux = 1 lumen/m²). Si può constatare che la caratteristica di una cellula fotoconduttrice è molto meno lineare della caratteristica di una cellula fotoemissiva, tuttavia la prima presenta una variazione di corrente molto maggiore [1].

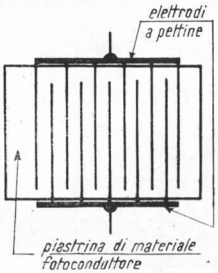


Fig. 118.1 – Costituzione di una cellula fotoconduttrice.

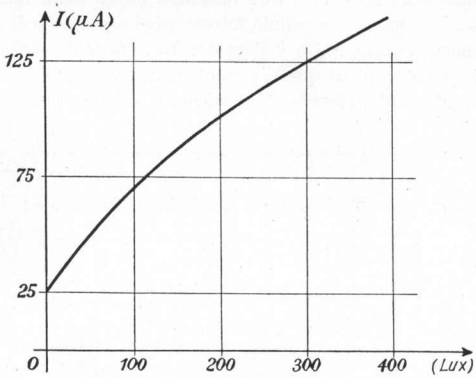


Fig. 118.2 – Caratteristica di illuminazione di una fotoresistenza.

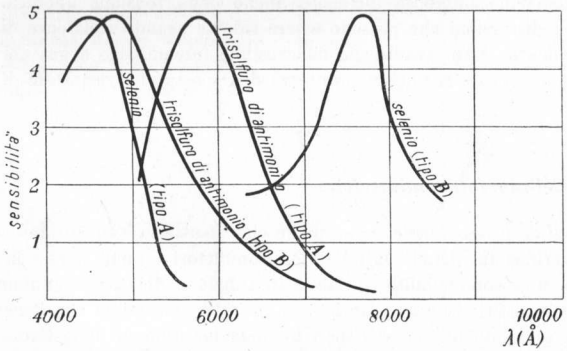


Fig. 118.3 – Sensibilità di materiali fotoconduttori impiegati nelle cellule fotoconduttrici.

---

[1] Per alcune fotoresistenze il valore di resistenza può passare da poche decine di Ω alla luce ad alcune decine di $M\Omega$ al buio.

Occorre anche tener presente che la sensibilità dei materiali fotonduttori dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente come si rileva dalla fig. 118.3 relativa ad alcuni materiali impiegati nelle cellule fotonduttrici.

119. – *Cellule fotovoltaiche.*

Le *cellule fotovoltaiche* sono quelle che sfruttano l'effetto fotovoltaico per il quale l'energia luminosa viene direttamente trasformata in energia elettrica. Queste cellule funzionano quindi senza bisogno di alcuna tensione applicata

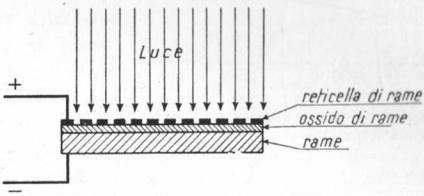


Fig. 119.1 – Costituzione di una cellula fotovoltaica.

da un generatore esterno, mentre ai loro capi si manifesta una d.d.p. allorchè la loro parte fotosensibile è colpita dalla luce.

In fig. 119.1 è schematizzata la costituzione di una cellula fotovoltaica. Essa risulta di una piastrina di rame ricoperta da uno strato di ossido di rame

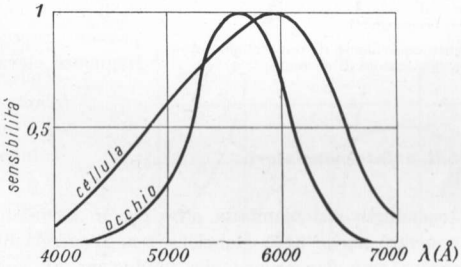


Fig. 119.2 – Risposta spettrale di una cellula fotovoltaica.

ed infine da una reticella di rame o da una pellicola di rame translucida esposta alla radiazione incidente. Nella figura sono pure indicate le polarità che si generano ai terminali del fotoelemento.

Le cellule fotovoltaiche hanno il vantaggio sulle cellule fotoemissive e su quelle fotoconduttrici di non richiedere sorgenti di f.e.m.; esse sono in grado di produrre intensità di corrente sufficienti ad essere rivelate da uno strumento ed anche ad azionare un relè sensibile. La curva di risposta di una cellula fotovoltaica si avvicina molto (fig. 119.2) alla curva di sensibilità dell'occhio umano.

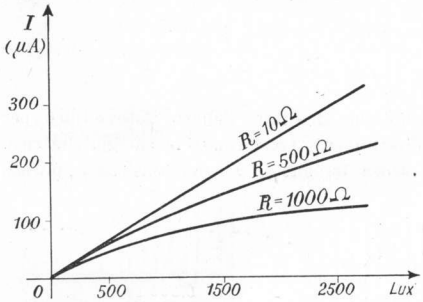


Fig. 119.3 - Caratteristiche di illuminamento di una cellula fotovoltaica.

In fig. 119.3 sono indicate alcune *caratteristiche di illuminamento* di una cellula fotovoltaica per diverse resistenze di carico. Il comportamento migliore si ha con il funzionamento in corto circuito (o quasi); la cellula fotovoltaica può infatti essere considerata come un generatore di corrente (fig. 119.4) di resistenza interna R_i dell'ordine dei $k\Omega$; quanto minore è la resistenza di carico tanto maggiore è la frazione di intensità utilizzata.

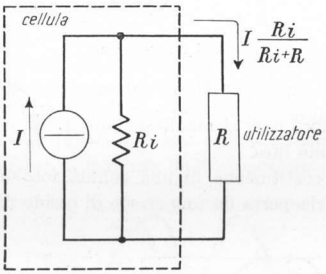


Fig. 119.4 - Circuito equivalente di una cellula fotovoltaica (generatore di corrente).

Le cellule fotovoltaiche hanno l'inconveniente di essere lente nella risposta a variazioni di illuminamento cosicchè non possono essere utilizzate per frequenze elevate.

120. – *Fotodiodi e fototransistori.*

L'effetto fotoconduttivo si manifesta oltre che in alcuni materiali (come visto precedentemente) anche nella giunzione *p-n*. L'energia luminosa infatti (come quella termica) può dar origine alla produzione di coppie buchi-elettroni alterando la conducibilità della giunzione; questa è la ragione per cui i normali diodi e transistori vengono racchiusi in un involucro non trasparente alla luce.

Nei *fotodiodi* a giunzione l'elemento sensibile alla luce è appunto costituito dalla giunzione (fig. 120.1). Per il corretto funzionamento il fotodiodo deve essere polarizzato in senso inverso (fig. 120.2); in assenza di luce nel fotodiodo

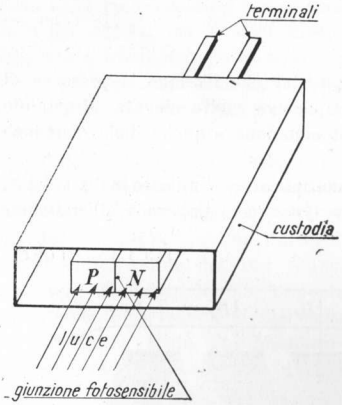


Fig. 120.1 – Fotodiodo.

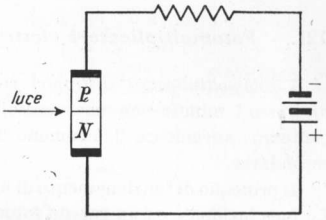


Fig. 120.2 – Polarizzazione di un fotodiodo.

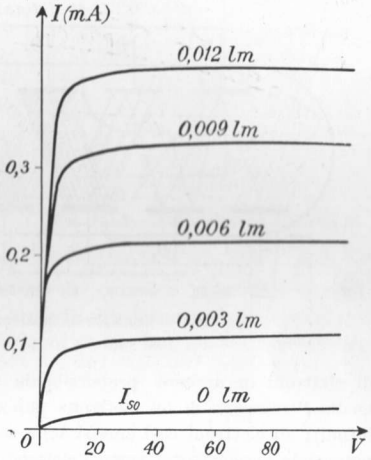


Fig. 120.3 – Famiglia di caratteristiche di un fotodiodo.

circola la corrente inversa di saturazione, mentre l'intensità cresce in funzione del flusso luminoso come rappresentato dalla famiglia di caratteristiche di fig. 120.3.

Nei *fototransitori* si usa la giunzione base-emettitore come elemento fotosensibile; le variazioni di intensità di corrente sono poi amplificate nel circuito di collettore. Un fototransistore quindi oltre che rivelare la quantità di luce e le sue variazioni (come il fotodiodo) amplifica anche il segnale così ottenuto.

In fig. 120.4 è indicata la risposta spettrale di un fotodiodo o di un fototransistore. Vantaggiosa caratteristica di questi elementi è la prontezza di risposta alle variazioni del flusso luminoso.

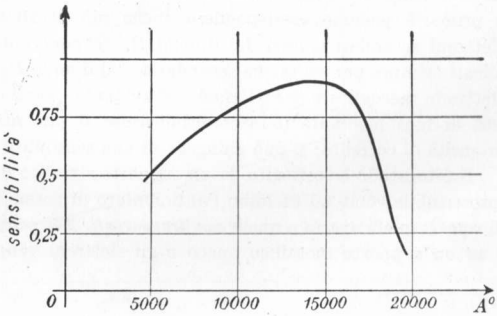


Fig. 120.4 – Risposta spettrale di un fotodiodo (o di un fototransistore).

121. - *Fotomoltiplicatori elettronici.*

I *fotomoltiplicatori elettronici* sono dispositivi che rivelano la presenza di un flusso luminoso con una sensibilità complessiva molto elevata, sfruttando contemporaneamente il fenomeno della fotoemissione e quello della emissione secondaria.

Il principio di funzionamento di un fotomoltiplicatore è indicato in fig. 121.1 [1] La luce incidente su un catodo fotoemissivo (*fotocatodo*) provvede all'emissione

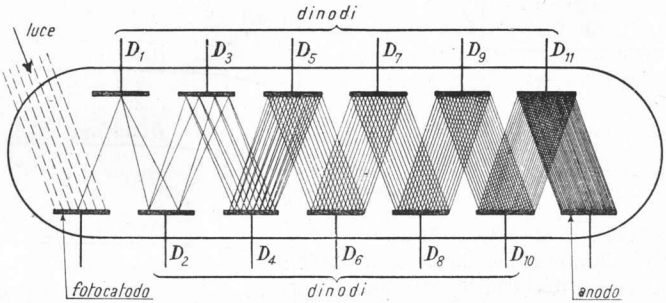


Fig. 121.1 - Principio di funzionamento di un fotomoltiplicatore.

di elettroni in numero proporzionale al numero dei fotoni incidenti (in media l'emissione di un elettrone può corrispondere all'incidenza di 10 ÷ 20 fotoni); gli elettroni così emessi sono convogliati (per mezzo di un opportuno potenziale acceleratore) verso l'elettrodo D_1 denominato *dinodo*. Gli elettroni che giungono sul dinodo D_1 cedono la loro energia cinetica provocando l'emissione secondaria di altri elettroni dal dinodo stesso (ad un elettrone incidente o primario possono corrispondere anche più di 10 elettroni secondari). Gli elettroni secondari emessi dal dinodo D_1 vengono convogliati e quindi moltiplicati (sempre per emissione secondaria) dal dinodo D_2 e così via fino all'ultimo elettrodo raccoglitore che è l'anodo. È evidente quindi che da una piccola quantità di luce mediante il fotomoltiplicatore si può ottenere una apprezzabile intensità di corrente: si può giungere ad una sensibilità di alcuni ampere/lumen.

Il fotocatodo è costituito da un supporto rivestito di uno strato di materiale fotosensibile come ad esempio l'antimoniuro di cesio. Esistono due diversi tipi di *catodi*: quelli *opachi* e quelli *semitrasparenti*. Nei primi lo strato fotosensibile è su un supporto metallico opaco e gli elettroni vengono emessi dalla stessa

---

[1] In fig. 121.1. la disposizione geometrica degli elettrodi è solo indicativa ai fini della moltiplicazione elettronica: la loro disposizione in un vero fotomoltiplicatore è determinata secondo i principi dell'ottica elettronica.

parte della luce incidente (come indicato in fig. 121.1); nei secondi invece il supporto è trasparente è lo strato fotosensibile è depositato sulla parte opposta a quella su cui deve giungere la luce (fig. 121.2).

I dinodi (che nel loro insieme costituiscono il *sistema moltiplicatore*) sono polarizzati con tensioni crescenti verso l'anodo e la d.d.p. tra due dinodi successivi è dell'ordine dei 100 ÷ 150 V. Essi sono di materiale che presentano spiccatamente il fenomeno dell'emissione secondaria come l'antimoniuro di cesio, l'ossido di rame-berillio e l'ossido di argento-magnesio.

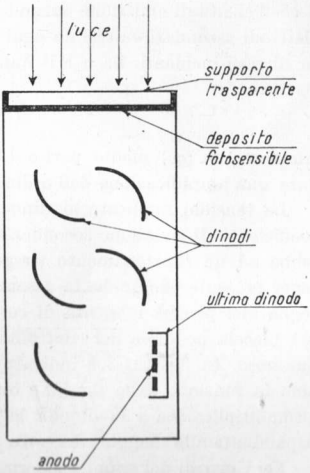


Fig. 121.2 – Fotomoltiplicatore con fotocatodo semitrasparente.

L'*amplificazione complessiva* A del sistema di moltiplicazione elettronica, ossia il rapporto tra il numero di elettroni raccolti dall'anodo e quello degli elettroni emessi dal fotocatodo, dipende dal *rendimento di raccolta* e dal *coefficiente di emissione secondaria* di ogni dinodo. Il rendimento di raccolta g è il rapporto tra il numero di elettroni incidenti in un dinodo ed il numero di elettroni emessi dal dinodo precedente;

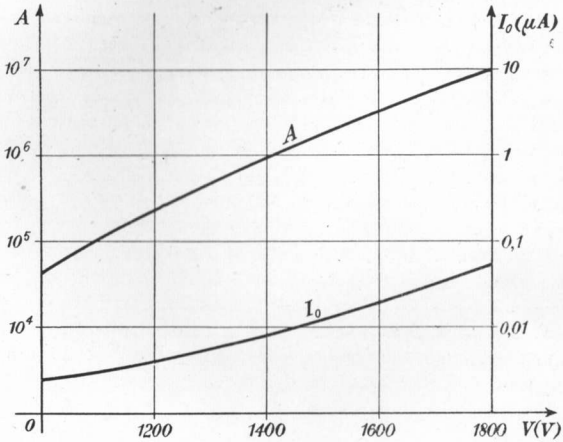


Fig. 121.3 – Variazione dell'amplificazione di corrente e della intensità di corrente buia in funzione della tensione totale tra anodo e fotocatodo di un fotomoltiplicatore.

il coefficiente di emissione secondaria δ è invece il rapporto tra il numero di elettroni secondari emessi da ogni dinodo ed il numero degli elettroni primari su di esso incidenti. Se n è il numero dei dinodi l'amplificazione di corrente risulta:

$$A = (g\delta)^n .$$

Ammesso un $(g\delta)$ medio pari a 4,5 un fotomoltiplicatore con 11 dinodi può dare una amplificazione dell'ordine di $15 \cdot 10^6$.

Le tensioni applicate ai dinodi devono essere stabili nel tempo poichè il coefficiente di emissione secondaria δ varia molto con la tensione, il che porterebbe ad un funzionamento irregolare del fotomoltiplicatore. Occorre inoltre tener presente che anche in assenza di luce l'anodo del fotomoltiplicatore raccoglie una piccola intensità di corrente I_0 (*corrente buia*) che conviene sia la più piccola possibile nei confronti della intensità di corrente dovuta al flusso luminoso. In fig. 121.3 è indicato come variano l'amplificazione e la corrente buia in funzione della tensione totale applicata tra anodo e fotocatodo in un fotomoltiplicatore a 11 dinodi: la zona di miglior funzionamento è quella corrispondente alla maggior distanza tra le due curve.

Nei riguardi del circuito esterno il fotomoltiplicatore deve essere considerato un generatore di corrente.

INDICE ANALITICO

Accettori, 277.
Accoppiamento tra due circuiti oscillatori, 171.
— critico, 159.
— sottocritico, 160.
— supercritico, 160.
Adattamento di impedenza, 176.
Adattatore (quadripolo), 186.
Amplificatori magnetici, 310.
Amplificazione, 231.
— di corrente, 304.
— — potenza, 304.
— — tensione, 304.
Angolo di perdita di un condensatore, 40.
Anodo, 195.
— virtuale, 248.
Attenuatore (quadripolo), 187.
Attenuazione (diagramma di), 188.

Banda passante di circuiti risonanti, 88, 99.
— — — — oscillatori accoppiati, 163.
Barriera di potenziale, 280.
Base, 290.
— comune, 291.
Battimenti, 148.
Buchi, 275.

Caduta percentuale, 10.
Camera di condensazione, 257.
Campi elettrici, 318.
— magnetici, 321.
Cannone elettronico, 333.
Capacità, 39.
— residua, 44.
Caratteristica di ingresso, 294.
— — innesco, 254.
— — uscita, 292.
— globale, 217.
— mutua di corrente, 294.
— — dinamica, 229.
Caratteristiche a corrente costante, 221.
— anodiche del diodo, 198.
— — — triodo, 218.
— dei transistori, 292.
— di controllo, 292.
— — uscita (amplificatore magnetico), 316.
— mutue, 219.
— — di tensione, 296.
Carica spaziale, 196.
Catodi (tipi di), 207.
Catodo, 195.
Cellule fotoconduttrici, 345.
— fotoemissive, 343.
— fotovoltaiche, 347.
Child (legge di), 200.
Circuiti accoppiati, 146, 149.
Circuiti equivalenti, 202, 234.
— oscillatori (*LC*), 64.
— — accoppiati in regime sinusoidale, 155.
— — — (vari metodi di accoppiamento), 171.
— *RC*, 54, 77, 80, 106, 111, 120.
— *RL*, 61, 80, 82, 137, 138, 140.
— *RLC*, 141.
Circuito equivalente di un condensatore, 40.
— — — — induttore, 28.
— — primario (circuiti accoppiati), 151.
— — secondario (circuiti accoppiati), 153.
— risonante parallelo, 96.
— — — a variazione di capacità, 100.
— — — — — — induttanza, 100.
— — serie, 82.
— — — a variazione di capacità, 92.
— — — — — — induttanza, 95.
Codice dei colori per resistori, 25.
Coefficiente di accoppiamento critico, 159.
— — amplificazione, 217, 222.
— — — di corrente, 296.
— — controreazione interna di tensione, 296.
— — mutua induzione, 149.
— — risonanza, 84, 97.
— — smorzamento, 71.
Collettore, 290.
— comune, 291.
Compensatori, 44.
Condensatore, 39.
Condensatori a carta, 42.
— — — metallizzata, 42.
— — mica, 42.
— al tantalio, 43.
— ceramici, 42.
— elettrolitici, 42.
— usati nei circuiti elettronici, 42.
— variabili, 43.

Condizione di massimo trasferimento di potenza, 173.
Conducibilità intrinseca, 276.
— negativa, 275.
— positiva, 276.
Conduttanza mutua, 222.
Conduttori, 193.
Conduzione elettrica nei gas, 244.
Corrente catodica, 216.
— di emissione, 216.
— — lancio, 215.
— — magioranza, 281.
— — minoranza, 281.
— inversa di saturazione, 283.
Correzione di massa, 319.
Costante di attenuazione, 186.
— — fase, 186.
— — propagazione, 186.
— — tempo, 56, 62.
Curva di risonanza, 85, 98.
— — — universale, 101.
Curve di risonanza dei circuiti oscillatori accoppiati, 158.

Decibel, 104.
Decremento logaritmico, 72.
Deflessione elettrostatica, 329.
— magnetica, 331.
Deriva termica cumulativa, 309.
Derivazione, 13.
Diagramma di attenuazione, 188.
— polare, 78.
Diffusione, 278.
Dinodi, 350.
Diodi a gas a catodo caldo, 246.
— — — — — freddo, 263.
— — punta di contatto, 284.
— — semiconduttore, 281.
— — vuoto, 195.
— tunnel, 288.
— Zener, 286.
Dispositivi fotoelettrici, 341.
Dissipazione anodica massima, 221.
Dissonanza, 102, 157.
Distorsione di non linearità, 231.
Donatori, 277.
Doppio diodo, 215.
Drogatura di un cristallo, 276.

Eccitroni, 262.
Effetto di vicinanza, 21.
— fotoconduttivo, 341.
— fotoemissivo, 341.
— fotoelettrico, 341.
— fotovoltaico, 341.
— pellicolare, 19.
— stroboscopico, 273.
Efficienza dell'emissione, 203.
Elementi circuitali, 17.
Elettroni, 193.
— liberi, 193.
Emettitore, 290.
— comune, 290.
Emissione fotoelettronica, 341.
— secondaria, 226, 240.
— termoelettronica, 193.
Energia di carica di un condensatore, 58.
— — — — — induttore, 63.
— — eccitazione, 244.
— — ionizzazione, 245.
Equazione di Vallauri, 233.
Errore relativo di spostamento, 12.
— — — velocità, 12.
Estrazione (lavoro di), 193.

Fanotron, 246.
Fattore di merito di un induttore, 28.
Fenomeni transitori in circuiti *RC*, 54.
— — — — *RL*, 61.
Fenomeno dei battimenti, 148.
Filo Litz, 37.
Filtri, 188.
— di banda, 167.
— eliminatori di banda, 191.
— passo alto, 80, 189.
— passa-banda, 190.
— passa-basso, 78, 82, 189.
Flusso concatenato, 27.
Forme d'onda, 1.
— — a dente di sega, 11.
— — di derivazione ed integrazione, 13.
— — rettangolari, 8.
— — sinusoidali, 4.
— — triangolari, 10.
Fosfori (per tubi fluorescenti), 269.
Fotocatodo, 350.
Fotodiodi, 348.
Fotomoltiplicatori elettronici, 350.
Fototransistori, 349.
Frequenza delle oscillazioni in circuiti *LC*, 67.
— di risonanza, 65, 83.
— — taglio inferiore, 79, 81.
— — — superiore, 77, 81.
— frontiera (filtri), 188.
Frequenze di taglio di circuiti oscillatori accoppiati, 163.
— — — di un circuito risonante, 88, 99, 106.

Generatore di corrente, 45.
— — tensione, 45.
Getter, 208.
Giunzione $p-n$, 278.
Gradino di tensione o di corrente, 6.
Graetz (ponte di), 287.
Griglia, 216.
— controllo, 216.
— di soppressione, 243.

Ignitore, 259.
Ignitroni, 259.
Impedenza caratteristica (quadripoli), 183.
— immagine di entrata, 185.
— — — uscita, 185.
Impulsi, 13.
Induttanza, 25.
Induttanza di un solenoide, 31.
Induttori variabili, 34.
Integrazione, 13.
Ionizzazione, 245.
— secondaria, 264.
Isolanti, 193.

Kennelly-Steinmetz (teorema di), 53.
Kirchhoff (principi di), 47.

Lavoro di estrazione, 193.
Legami covalenti, 275.
Legge di Child, 200.
— — Lenz, 26.
— — Ohm, 17.
— — — generalizzata, 47.
— — Paschen, 250.
— — Ricardson, 194.
Lenti elettrostatiche, 324.
— magnetiche, 328.
Libero cammino medio, 244.
Litz (filo), 37.
Livello, 105.

Macchie catodiche, 258.
Massima dissipazione anodica, 221.
Massimo trasferimento di potenza (condizione di), 173.
Microscopio elettronico, 339.
Millman (teorema di), 51.
Mutatori a vapore di mercurio, 256.

Norton (teorema di), 46.

Ohm (legge di), 17.
— (legge di Ohm generalizzata), 47.
Oscillazioni libere, 65.
— — in circuiti oscillatori accoppiati, 146.
— — persistenti, 64.
— — smorzate, 68.
Oscillografo, 336.
Ottica elettronica, 318.
Overshoot, 10.

Parametri ibridi, 304.
Partitori compensati, 129.
Paschen (legge di), 250.
Pendenza, 222.
Pentodo, 243.
Permeabilità incrementale, 33.
Perdite di un induttore, 28.
Ponte di Graetz, 287.
Portatori di maggioranza, 278.
— — minoranza, 278.
Potenza (condizione di massimo trasferimento di), 173.
Potenziale di interdizione, 215.
— — — anodico, 219.
— — — di griglia, 219.
— — saturazione, 197.
— globale del tetrodo, 237.
— — — triodo, 217.
— intrinseco, 193.
Potenziometri a filo, 24.
— chimici, 24.
Potere separatore (di un microscopio), 339.
Principi di Kirchhoff, 47.
Principio di sovrapposizione, 53.

Quadripoli, 178.
— a π, 180.
— — — simmetrico, 185.
— — T, 180.
— — — simmetrico, 184.
— adattatori, 186.
— attenuatori, 187.
— attivi, 178.
— passivi, 178.
— uguali in cascata, 183.

Raddrizzamento, 212.
Rapporto di trasmissione, 186.
Reattore (per tubi fluorescenti), 271.
Relazione di unimodularità, 179.
Rendimento nel raddrizzamento, 213.
Resistenza, 17.
— critica, 73.
— di attacco, 299.
— — ingresso, 305.
— differenziale del diodo, 201.
— incrementale del diodo, 200.
— interna differenziale del triodo, 222.
— — di ingresso, 296.
— — — uscita, 296.
Resistori a filo, 24.
— ad impasto, 24.
— usati nei circuiti elettronici, 23.
Retta di attacco, 300.
— — carico, 210.
Rettificatori metallici, 288.
Richardson (legge di), 194.
Riscaldamento, 194.
— diretto, 203.
— indiretto, 203.
Risoluzione grafica di circuiti con diodi, 209, 286.
— — — — — transistori, 299.
— — — — — triodi, 228.
Risonanza, 83.

Saturazione dell'emissione, 197.
Scarica di un condensatore su una resistenza 59.
— — — induttore su una resistenza, 64.
— — Towsend, 264.
Schermo fluorescente, 333, 340.
Semiconduttori, 274.
Senditroni, 262.
Sistema di deflessione, 334.
— — focalizzazione, 334.
Sovratensione percentuale, 10.
Spettrogramma, 269.
Starter (per tubi trigger), 267.
— (per tubo fluorescente), 271.

Tempo di integrazione massimo, 251.
— — salita, 10, 108.
Tensione di innesco, 249.
— — polarizzazione, 230.
— — Zener, 285.
— diretta, 203, 282.
— inversa, 203, 283.
Teorema di Kennelly-Steinmetz, 53.
— — Millman, 51.
— — Norton, 46.
— — Thèvenin, 50.
Tetrodo a fascio elettronico, 241.
— — griglia schermo, 237.
Thèvenin (teorema di), 50.
Tiratroni, 252.
Towsend (scarica di), 264.
Transistori, 289.
Trasduttori (amplificatori magnetici), 310.

Trasmissione (rapporto di), 186.
Trigger, 266.
Triodo, 216.
Tubi a raggi catodici, 333.
— elettronici a gas, 244.
— — — vuoto, 193.
— fluorescenti, 268.
Tungar, 251.

Unimodularità (relazione di), 179.
Urto anelastico, 244.
— elastico, 244.

Vallauri (equazione di), 233.
Valor medio convenzionale, 5.
— — di una forma d'onda, 1.
— efficace, 3.
— picco-picco, 9.
Variometro, 34.

Zener (diodi), 286.
— (tensione di), 285.

Finito di stampare
nel febbraio 1965
presso la STEB - Bologna
via Stalingrado, 13

DELLO STESSO AUTORE:

ELETTRONICA GENERALE

Volume secondo: Raddrizzamento - Linee - Amplificatori - Generazione di forme d'onda sinusoidali e non sinusoidali - Modulazione e rivelazione - Alimentatori stabilizzati - Contatori elettronici - Circuiti particolari - Analisi armonica. 1964, 8°, pp. XII-420 con 500 figure . . . . . **L. 4000**

PREZZO L. 4.000